Toelichting Rekenen & Wiskunde

Toelichting op het voorstel voor de basis van de herziening van de kerndoelen en eindtermen van de leraren en schoolleiders uit het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde

curriculum.nu

VANDAAG WERKEN AAN HET ONDERWIJS VAN MORGEN

Colofon

Dit rapport is onderdeel van het advies ‘Samen bouwen aan het primair en voortgezet onderwijs van morgen’ van 10 oktober 2019.
Curriculum.nu is tot stand gekomen en uitgevoerd onder gezamenlijke coördinatie van de VO-raad, de PO-Raad, CNV onderwijs, de Algemene Onderwijsbond (Aob), de Federatie van Onderwijsvakorganisaties (FvOv), de Algemene Vereniging Schoolleiders (AVS), het Landelijk Aktie Komite Scholieren (LAKS) en Ouders en Onderwijs. De uitvoering gebeurt in samenwerking met SLO, Nationaal Expertisecentrum Leerplanontwikkeling.

Inleiding

10 oktober 2019

Het is belangrijk om leerlingen goed te blijven voorbereiden op de toekomst. Daarom hebben we in Nederland wettelijk vastgelegd wat leerlingen moeten kennen en kunnen in de vorm van kerndoelen en eindtermen: het curriculum. Deze landelijke doelen zijn dertien jaar geleden voor het laatst vastgesteld. Om het curriculum te actualiseren, hebben leraren en schoolleiders voor negen leergebieden voorstellen gedaan die de basis vormen voor de herziening van de kerndoelen en eindtermen. Deze leergebieden zijn Nederlands, Engels/Moderne vreemde talen, Rekenen & Wiskunde, Burgerschap, Digitale geletterdheid, Mens & Maatschappij, Mens & Natuur, Kunst & Cultuur en Bewegen & Sport.

In de periode maart 2018 tot oktober 2019 hebben zij in ontwikkelteams per leergebied de benodigde kennis en vaardigheden bepaald. Zij waren hierbij zelf aan zet, mét de inbreng van wetenschappers, lerarenopleidingen, vervolgonderwijs, scholen en vakverenigingen. Ook haalden zij feedback op bij leraren, ouders, leerlingen, maatschappelijke organisaties en het bedrijfsleven. De ontwikkelteams werden ondersteund door leerplanspecialisten.

Op basis van de aangereikte feedback en inzichten uit literatuur zijn de ontwikkelteams tot hun voorstel gekomen. In dit document vindt u een toelichting op het voorstel van het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde. In deze toelichting beschrijft het team de keuzes die zij gemaakt hebben om tot een visie, grote opdrachten en bouwstenen voor hun leergebied te komen en de bronnen die zij daarbij hebben benut. Ook licht het team de opbouw van de doorlopende leerlijn toe en de samenhang tussen de verschillende onderdelen en met andere leergebieden. Het voorstel zelf vindt u in het document 'Voorstel voor de basis van de herziening van de kerndoelen en eindtermen van de leraren en schoolleiders uit het ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde'. Het voorstel van het leergebied Rekenen & Wiskunde staat niet op zichzelf. Het kent veel verbindingen met de andere leergebieden. Deze staan beschreven in de toelichting van het leergebied Rekenen & Wiskunde. Ook op www.curriculum.nu/rekenen-wiskunde kunt u een beeld krijgen hoe het leergebied Rekenen & Wiskunde samenhangt met andere leergebieden. Onder verantwoording-rekenen-wiskunde vindt u de verantwoording van het team over de gemaakte keuzes en de verslagen naar aanleiding van de consultatierondes.

Inhoudsopgave

1. Toelichting op de visie 4

2. Toelichting op de grote opdrachten 9

3. Toelichting op de bouwstenen 14

4. Toelichting op de aanbevelingen 23

5. Bronnenlijst 25

Bijlage A Begrippenlijst 28

Bijlage B Denk- en werkwijzen 32

Bijlage C Samenhangrelaties met andere leergebieden 42

Bijlage D Uitgewerkte voorbeelden 50

1. TOELICHTING OP DE VISIE

Wij als ontwikkelteam denken dat het voorstel een voldoende basis is voor herziening van kerndoelen en eindtermen. Als we meer tijd tot onze beschikking zouden hebben gehad, dan zouden we de lijn visie – grote opdrachten – bouwstenen consistenter beschreven hebben dan nu het geval is. Ook zouden we in dat geval meer aandacht hebben geschonken aan de leesbaarheid van de teksten.

De visie van ons ontwikkelteam Rekenen & Wiskunde op het leergebied bevat een aantal onderdelen. Die worden in het vervolg beschreven en van onderbouwing voorzien.

Veranderingen in de wereld, de samenleving, de beroepspraktijk en technologie

Onder deze kop schetsen we een aantal trends en ontwikkelingen. Hierbij hebben we gebruik gemaakt van inzichten van het Platform Wiskunde Nederland. Dit platform heeft in 2012 een visiedocument geschreven over wiskunde en de rol van wiskunde in de samenleving (Platform Wiskunde Nederland, 2012). Verder heeft Deloitte in 2014 becijferd welke bijdrage wiskunde levert aan de Nederlandse economie (Deloitte, 2014). In de visie van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren zijn we vergelijkbare inzichten tegengekomen (NVvW, 2017). Ook hebben we kennisgenomen van wat de beroepspraktijk in de toekomst aan wiskunde-kennis en –vaardigheid verwacht (Boswinkel & Schram, 2011). Gravemeijer heeft met ons inzichten gedeeld over de verhouding tussen wiskunde en technologie en de consequenties daarvan voor het leergebied (Gravemeijer et al, 2017). Een en ander hebben we in onze visie betrokken.

Dalend beheersingsniveau van vooral betere leerlingen

Om inzicht te krijgen in hoeverre betere leerlingen in de loop van de jaren steeds minder presteren, hebben we gebruik gemaakt van internationale vergelijkingsonderzoeken. Onderstaande tabellen brengen deze trend in beeld.

Tabel 1. Percentage Nederlandse leerlingen dat het geavanceerde, hoge, midden en lage niveau behaalt in TIMSS, 1995-2015 (Van Graft, Van Leeuwen & Van Zanten, 2017)

	1995	2003	2007	2011	2015
Geavanceerd	12%	5%	7%	5%	4%
Hoog	50%	44%	42%	44%	37%
Midden	87%	89%	84%	88%	83%
Laag	99%	99%	98%	99%	99%

Tabel 2. Percentage Nederlandse leerlingen dat elk van de zes vaardigheidsniveaus behaalt in PISA, 2006 – 2015, bewerkt (Van der Hoeven et al, 2017)

	2006	2009	2012	2015
6	5,4%	4,4%	4,4%	3,2%
5	21,1%	19,9%	19,3%	15,5%
4	45,3%	43,8%	43,1%	38,5%
3	69,5%	67,6%	67,3%	63,4%
2	88,4%	86,6%	85,2%	83,2%
1	97,6%	97,2%	96,2%	94,7%
< 1	100,0%	100,0%	100,0%	99,9%

Verder hebben we in dit kader gebruik kunnen maken van publicaties van CPS (Sjoers, 2017) en de Inspectie van het onderwijs (Inspectie van het onderwijs, 2019).

Manco's in doorlopende leerlijnen

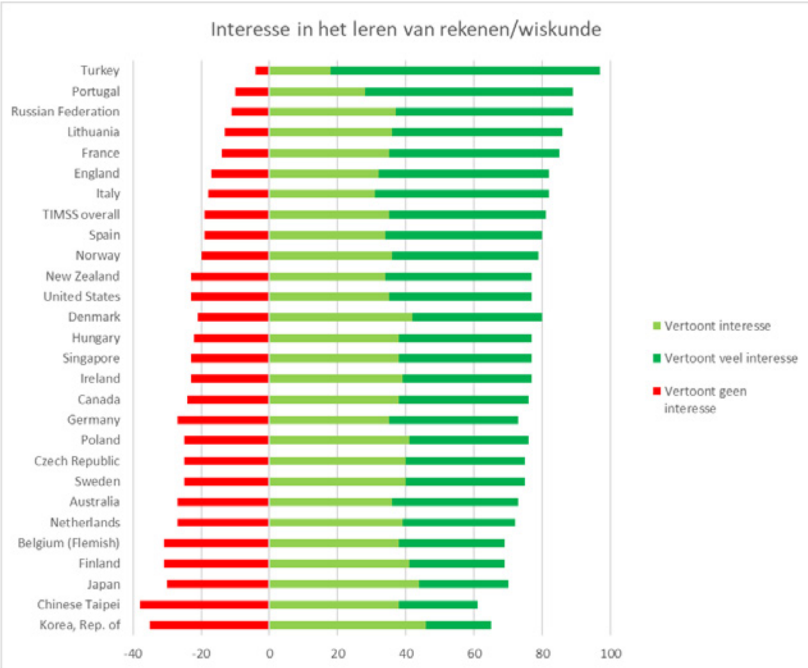
Manco's in doorlopende leerlijnen wiskunde in het vmbo zijn onlangs onderzocht door SLO (Schmidt, 2018). Voor havo en vwo zijn er geen recente onderzoeken naar de aansluiting met het hoger onderwijs beschikbaar.

Gebrek aan samenhang en afstemming

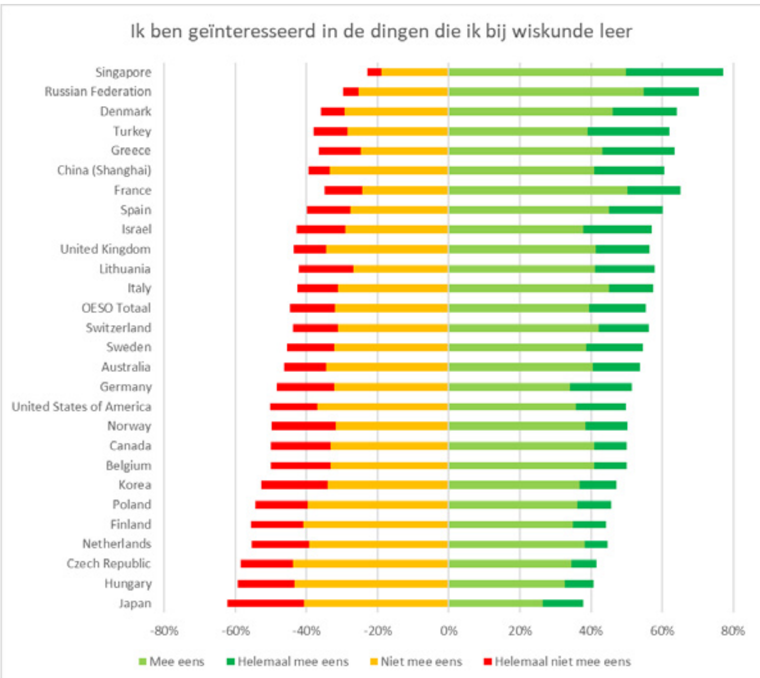
Onze inzichten hieromtrent zijn ontleend aan praktijkervaring van de leden van het ontwikkelteam. Daarbij hebben enkele publicaties (Nelissen, 2007; Rijborz, 2018) onze inzichten versterkt. Ook hebben we kennisgenomen van de inzichten van het platform Rekenbewust Vakonderwijs (platform Rekenbewust Vakonderwijs, z.j.).

Gebrek aan motivatie onder leerlingen

Dat leerlingen niet erg gemotiveerd zijn om wiskunde te leren, blijkt onder andere uit internationale vergelijkingsonderzoeken. We zien hieromtrent het volgende beeld.



Figuur 1: Motivatiescores uit TIMSS 2015, grade 4 = groep 6



Figuur 2: Motivatiescores uit PISA 2012

Rekenen en wiskunde in de samenleving

De inzichten die hier beschreven zijn, zijn vooral ontleend aan de eerdergenoemde bronnen van Platform Wiskunde Nederland. Het onderscheid tussen rekenen en wiskunde als een formeel-deductief systeem en als een middel om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen – dat wat we in onze visie functionele wiskunde genoemd hebben - hebben we onder andere ontleend aan het Referentiekader rekenen, waarin een scheiding is gemaakt tussen functioneel rekenen in de F-niveaus en formeel rekenen in de S-niveaus (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen, 2008). De omschrijving van gecijferdheid is afkomstig van de website www.gecijferdheid.nl (Hoogland, z.j.). Onze stellingname dat functionele wiskunde niet kan zonder een zekere basis aan formele wiskunde is mede ingegeven door inzichten van onder andere Hirsch (Hirsch, 2016). Het onderscheid tussen realistische en traditionele didactiek is in 2009 beschreven door de KNAW (KNAW, 2009).

Doelen van het onderwijs in Rekenen & Wiskunde

De drie hoofddoelen van het onderwijs zijn ontleend aan Biesta (Biesta, 2012). Zij maken deel uit van het algemene ontwerpkader van Curriculum.nu. Ze worden ook vermeld in het eindverslag van het platform Onderwijs 2032 (Platform Onderwijs 2032, 2016). Dat wiskunde in beroep en burgerschap vooral functioneel gebruikt wordt, wordt in onderstaande tabellen geïllustreerd. De gegevens in deze tabellen zijn betrokken uit de database met resultaten van het PIAAC-onderzoek uit 2012. Dit onderzoek gaat over beheersing van onder andere rekenvaardigheid door volwassenen in beroep en het dagelijks leven. PIAAC staat voor Programme for the International Assessment of Adult Competencies.

Tabel 3: Gebruik van wiskunde in het beroep volgens het PIAAC-onderzoek van 2012

	nooit	af en toe	wekelijks
kostenberekeningen uitvoeren en budgetten opstellen	52%	20%	28%
rekenen met breuken en procenten	48%	16%	35%
rekenmachine gebruiken	36%	19%	56%
grafieken en tabellen maken	61%	25%	15%
eenvoudige algebra en werken formules	60%	18%	22%
geavanceerde wiskunde en statistiek	84%	12%	5%

Tabel 4: Gebruik van wiskunde in het dagelijks leven volgens het PIAAC-onderzoek van 2012

	nooit	af en toe	wekelijks
kostenberekeningen uitvoeren en budgetten opstellen	41%	39%	20%
rekenen met breuken en procenten	49%	33%	18%
rekenmachine gebruiken	25%	49%	26%
grafieken en tabellen maken	71%	23%	5%
eenvoudige algebra en werken formules	66%	24%	11%
geavanceerde wiskunde en statistiek	87%	10%	4%

Dat statistiek een speerpunt moet zijn van het leergebied Rekenen & Wiskunde wordt onderschreven door eenderde deel van de respondenten in een enquête van de Vereniging Ouders & Onderwijs en door de werkgroep Wiskunde voor Morgen (Werkgroep Wiskunde voor Morgen, 2018). Uit een enquête die het LAKS in het kader van Curriculum.nu onder leerlingen heeft afgenomen, blijkt dat een aantal respondenten meent “dat er een vak nodig is voor alle leerlingen om belastingen, hypotheken, loonschalen en verzekeringen te snappen.” Dit pleit voor financiële geletterdheid als onderdeel van ons leergebied.

De brede vaardigheden, beschreven in een handreiking (Curriculum.nu, 2018a), maken ook deel uit van het algemene ontwerpkader van Curriculum.nu. Meer dan de helft van de respondenten in de bovengenoemde enquête van de Vereniging van Ouders & Onderwijs pleit voor brede vaardigheden in het onderwijsaanbod waaronder bijvoorbeeld probleemoplossen.

Leerinhouden Rekenen & Wiskunde

Verschillende manieren om het onderwijsaanbod op inhoud aan leerlingen te differentiëren worden onder andere beschreven door CPS (Bouwman et al, 2018; Berben & Van Teeseling, 2018).

Doorlopende leerlijnen en 'opstroomlijnen'

Wij streven een sterkere verbinding tussen po en vo na door middel van zwaluwstaarten. Hiervoor is door SLO ook gepleit (Buys & Van der Zwaart, 2006). Het begrip zwaluwstaart is afkomstig uit de bouw.

De rol van informatie- en communicatietechnologie

Onze stellingname dat als gevolg van ICT er meer aandacht uit kan gaan naar verwerving van wiskundige concepten zonder dat direct in verband te brengen met procedurele kennis, wordt ondersteund door Gravemeijer (Gravemeijer, 2016). De noodzaak om (ook, of juist meer) aandacht te besteden aan verwerving van wiskundige concepten en aan wiskundig denken is door verschillende auteurs beschreven (Van Streun, 2001; Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, 2007; Ohlsson, 2011).

2.

TOELICHTING OP DE GROTE OPDRACHTEN

De grote opdrachten vormen de Big Ideas van het curriculum (Charles, 2005), die een basis vormen voor het leergebied. Deze grote opdrachten bestaan uit (1) wiskundige kennis en (2) wiskundige denk- en werkwijzen. Wiskundige denk- en werkwijzen worden toegepast op wiskundige kennis en wiskundige kennis is noodzakelijk om wiskundige denk- en werkwijzen uit te kunnen oefenen. De wiskundige kennis is op zijn beurt ingedeeld in een aantal kennisdomeinen. Deze opzet is vergelijkbaar met wiskundecurricula in het buitenland (Australië, Finland, sommige provincies van Canada, Noorwegen) en wordt breed gedeeld in het veld. De NVORWO spreekt in haar visiedocument (NVORWO, 2017) over basisvaardigheden en hogere-orde-vaardigheden. Ook zien we deze dualiteit terug in de toetskaders van TIMSS (Mullis & Martin, 2017) en PISA (OECD, 2018). De term 'denk- en werkwijzen' is afkomstig uit de leergebieden Mens & Natuur en Mens & Maatschappij. In het kader van samenhang in de curricula hebben we deze term overgenomen. In ons leergebied maken we in tegenstelling tot andere leergebieden geen onderscheid tussen denkwijzen en werkwijzen. In de praktijk lopen wiskundig denken en handelen naar ons idee door elkaar heen.

Kennisdomeinen

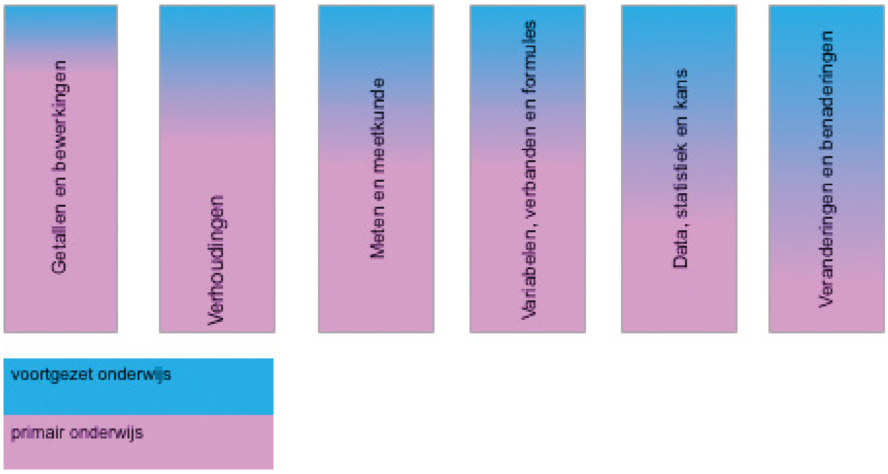
We hebben zes kennisdomeinen en zeven denk- en werkwijzen onderscheiden. De kennisdomeinen zijn afkomstig van gebruikelijke en internationaal geaccepteerde indelingen van het leergebied, uit de toetskaders van TIMSS (Mullis & Martin, 2017) en PISA (OECD, 2018), alsmede van het Referentiekader rekenen (Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen, 2008) en de concepten van cTWO (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, 2007). In het onderstaande overzicht is een aantal van deze indelingen naast elkaar gezet.

Tabel 5. Enkele domeinindelingen voor het leergebied Rekenen & Wiskunde

TIMSS-po	TIMSS-vo	PISA	Referentiekader rekenen	Concepten cTWO	Curriculum.nu
Number	Number	Quantity	Getallen	getal	Getallen en bewerkingen
			Verhoudingen		Verhoudingen
Geometric Shapes and Measures	Geometry	Space & Shape	Meten & Meetkunde	ruimte	Meten en meetkunde
	Algebra	Change & Relationships	Verbanden	formule functie	Variabelen, verbanden en formules
Data Display	Data and Chance	Uncertainty & Data		toeval	Data, statistiek en kans
				verandering	Veranderingen en benaderingen

Als ontwikkelteam hebben wij ervoor gekozen om uit deze indelingen een gemeenschappelijke basis te destilleren en deze te hanteren. De aandacht voor Benaderingen is ingegeven vanuit de gedachte dat benaderend rekenen en numerieke wiskunde met gebruikmaking van ICT in de toekomst belangrijker worden, zoals in onze visie is verwoord.

Niet alle kennisdomeinen komen in dezelfde mate in het primair als het voortgezet onderwijs voor. In de onderstaande figuur is dat in beeld gebracht.



Figuur 3: Aandeel van de kennisdomeinen in primair en voortgezet onderwijs

Deze figuur illustreert het zwaluwstaarten, zoals dat in de visie wordt omschreven.

Denk- en werkwijzen

De zeven denk- en werkwijzen zijn op soortgelijke wijze als de kennisdomeinen afgeleid van buitenlandse curricula, de toetskaders van TIMSS (Mullis & Martin, 2017) en PISA (OECD, 2018), het Referentiekader rekenen (Expertgroep Doorlopende Leerlijn taal en rekenen, 2008) en de wiskundige denkactiviteiten uit de bovenbouw van havo en vwo (Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, 2007). Onderstaande tabel bevat het resultaat van deze vergelijking.

Tabel 6: Vergelijking van enkele frameworks voor denk- en werkwijzen

TIMSS	Fundamental mathematical capabilities uit PISA	Referentiekader rekenen	Wiskundige denkactiviteiten cTWO	Curriculum.nu
	Using mathematical tools			Gereedschap en technologie gebruiken
Knowing		Paraat hebben		
Applying	Devising strategies for solving problems	Functioneel gebruiken	Analytisch denken en probleemoplossen	Wiskundig probleemoplossen
	Using symbolic, formal and technical language and operations		Abstraheren	Abstraheren
Reasoning	Reasoning and argument	Weten waarom	Logisch redeneren en bewijzen	Logisch redeneren
	Representation Communication			Representeren en communiceren
Applying	Mathematising		Modelleren en algebraïseren	Modelleren
				Algoritmisch denken
			Ordenen en structureren	
			Formules manipuleren	

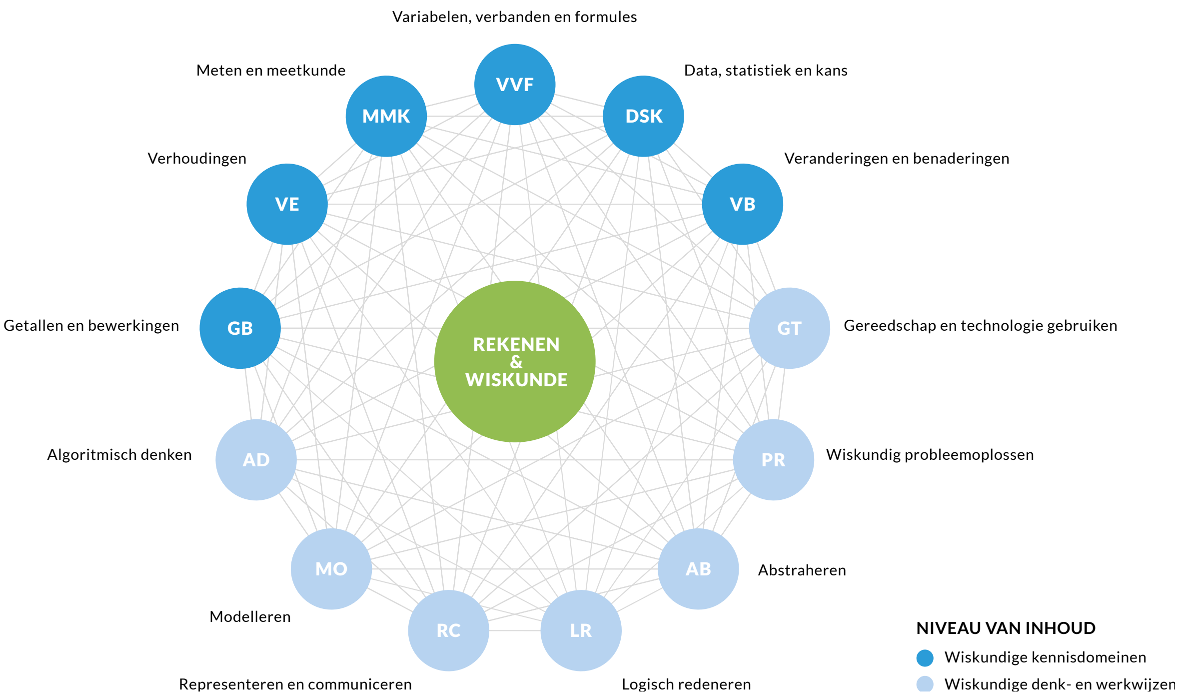
In dit overzicht vallen enkele keuzes op.

- Wij hebben geen denk- en werkwijze die overeenkomt met Knowing of met Paraat hebben, geïdentificeerd. Feitenkennis en procedurele vaardigheid rekenen we tot de kennisdomeinen. Daar staat dat ook beschreven.
- We hebben er voor gekozen om Abstraheren enerzijds en Representeren en communiceren anderzijds te splitsen. Daardoor kan een verband gelegd worden met taalgericht vakonderwijs (Van der Leeuw & Meestringa, 2014) en het leergebied Nederlands. We onderkennen verband tussen Representeren en communiceren en Abstraheren (Smit, 2013; OECD, 2019), maar we hebben er voor ons leergebied toch voor gekozen deze denk- en werkwijzen van elkaar te onderscheiden.
- We beschrijven één denk- en werkwijze die in geen ander framework voorkomt: Algoritmisch denken. Op basis van onze visie op wiskunde en ICT is deze denk- en werkwijze toegevoegd. Deze keuze biedt scholen de mogelijkheid om aan de hand hiervan verbindingen te leggen met het leergebied Digitale Geletterdheid.
- Structureren en ordeneren is een van de wiskundige denkactiviteiten van cTWO. Wij denken dat deze denkactiviteit sterke verwantschap heeft met Abstraheren en hebben daarom geen aparte denk- en werkwijze over structureren gedefinieerd.

Omdat de grote opdrachten conform de richtlijnen van Curriculum.nu tamelijk compact beschreven zijn, is in bijlage B een uitgebreidere beschrijving met voorbeelden opgenomen van de zeven denk- en werkwijzen.

Interne samenhang

Als ontwikkelteam zijn wij van mening dat goed reken- en wiskundeonderwijs bestaat uit een weloverwogen samengaan van kennisverwerving met (door)ontwikkeling van denk- en werkwijzen. In de onderstaande figuur, die we het *Wiskundeweb* genoemd hebben, wordt dit zichtbaar. In bijlage D staat een aantal 'uitgewerkte voorbeelden' waarin we het gebruik van het Wiskundeweb toelichten.



Figuur 4: Het Wiskundeweb als verbeelding van de onderlinge samenhang tussen de grote opdrachten van het leergebied Rekenen & Wiskunde

Samenhang met grote opdrachten van andere leergebieden

Op het niveau van grote opdrachten is enige expliciete samenhang te zien met andere leergebieden. Het leergebied Mens & Natuur benoemt bijvoorbeeld een bouwsteen Modelgebruik en –ontwerp die samenhangt met de grote opdracht Modelleren van ons leergebied. Verder is het communicatieaspect van de grote opdracht Representeren en communiceren gerelateerd aan de grote opdracht Interactie en een rijk taalaanbod ten behoeve van taal- en denkontwikkeling van het leergebied Nederlands.

Naast deze expliciet benoemde samenhang kent ons leergebied samenhang met andere leergebieden van een andere aard. De leergebieden leveren aan Rekenen & Wiskunde concepten uit hun leergebied, zoals 'energie' of 'macht', die voor Rekenen & Wiskunde contexten vormen. Ons leergebied levert omgekeerd reken- en wiskundig instrumentarium aan andere leergebieden. Op deze wijze krijgt reken- en wiskundebewust onderwijs vorm en krijgt ons leergebied meer betekenis voor de leerlingen dan nu het geval is. Van dat laatste is gebleken dat met name LAKS daar voorstander van is. Uitgangspunt daarbij is dat leerlingen reken- en wiskundige kennis en toepassingsvaardigheid verwerven in het leergebied Rekenen & Wiskunde en die gebruiken in andere leergebieden. Daarbij verdient het de voorkeur dat leergebieden daarbij de verantwoordelijkheid nemen om rekenen en wiskunde op dezelfde manier te gebruiken als leerlingen dat geleerd hebben bij rekenen en wiskunde. De curricula van zowel de andere leergebieden als die van Rekenen & Wiskunde bieden ruimte voor toepassing van rekenen en wiskunde.

3.

TOELICHTING OP DE BOUWSTENEN

De bouwstenen van het leergebied Rekenen & Wiskunde komen voort uit de grote opdrachten. We hebben er voor gekozen om bij elke grote opdracht één of meer sets van bouwstenen te definiëren. Er zijn geen sets van bouwstenen die bij meer dan één grote opdracht horen. Hierbij hebben we ook gebruik gemaakt van de indeling van de tussendoelen wiskunde voor de onderbouw van het vo (SLO, 2012) en van de domeinindeling uit de examenprogramma's wiskunde. Dit heeft geleid tot onderstaand raamwerk voor de bouwstenen.

Tabel 7: Raamwerk bouwstenen Rekenen & Wiskunde

GO's	Grote Opdrachten	BS	Bouwstenen
Kennisdomeinen			
1	Getallen en bewerkingen	1.1	Getallen
		1.2	Bewerkingen
2	Verhoudingen	2.1	Verhoudingen
3	Meten en meetkunde	3.1	Meten
		3.2	Vorm en ruimte
		3.3	Rekenen in de meetkunde
4	Variabelen, verbanden en formules	4.1	Verbanden, verschijningsvormen, en vergelijkingen
		4.2	Speciale verbanden
5	Data, statistiek en kans	5.1	Kansen en kansverdelingen
		5.2	Data en statistiek
6	Veranderingen en benaderingen	6.1	Veranderingen
		6.2	Benaderingen
Wiskundige denk- en werkwijzen			
7	Gereedschap en technologie gebruiken	7.1	Gereedschap en technologie gebruiken
8	Wiskundig probleemoplossen	8.1	Wiskundig probleemoplossen
9	Abstraheren	9.1	Abstraheren
10	Logisch redeneren	10.1	Logisch redeneren
11	Representeren en communiceren	11.1	Representeren en communiceren
12	Modelleren	12.1	Modelleren
13	Algoritmisch denken	13.1	Algoritmisch denken

Brede vaardigheden

Ook het leergebied Rekenen & Wiskunde biedt gelegenheid voor ontwikkeling van brede vaardigheden (Curriculum.nu, 2018a). Dat verloopt voornamelijk via de wiskundige denk- en werkwijzen. In het onderstaande overzicht staat hoe brede vaardigheden met wiskundige denk- en werkwijzen in verband gebracht kunnen worden.

Tabel 8: Verband tussen brede vaardigheden en denk- en werkwijzen

Brede vaardigheid	Wiskundige denk- en werkwijze	Toelichting
Probleemoplossend denken en handelen	Gereedschap en technologie gebruiken	hoe gereedschap en technologie ingezet kan worden om een oplossingsstrategie uit te voeren
	Wiskundig probleemoplossen	
	Modelleren	hoe modellen een rol kunnen vervullen bij het oplossen van problemen
	Algoritmisch denken	hoe een oplossingsstrategie van een probleem geformaliseerd kan worden
Kritisch denken	Gereedschap en technologie gebruiken	of resultaten van gebruik van gereedschap correct en betrouwbaar zijn
	Wiskundig probleemoplossen	of een oplossingsstrategie volstaat of een oplossing past bij het probleem
	Logisch redeneren	of een redeneertrant klopt en volstaat
	Modelleren	in hoeverre een model valide is
Creatief denken en handelen	Gereedschap en technologie gebruiken	of er in een situatie passend gereedschap voorhanden is hoe gereedschap ook voor andere doeleinden gebruikt kan worden dan waarvoor het bedoeld is
	Wiskundig probleemoplossen	hoe een probleem opgelost kan worden
	Logisch redeneren	hoe een bewering aangetoond of weerlegd kan worden
	Modelleren	hoe een model opgesteld kan worden
	Algoritmisch denken	hoe een algoritme tot stand gebracht kan worden
Communiceren	Representeren en communiceren	hoe een uitwerking gecommuniceerd kan worden naar een bepaalde doelgroep
Samenwerken	geen	
Sociale en culturele vaardigheden	geen	
Ondernemend denken en handelen	geen	

Brede vaardigheid	Wiskundige denk- en werkwijze	Toelichting
Oriëntatie op jezelf, je studie en je loopbaan	Abstraheren	loopbaankeuzes worden mede bepaald door hoe sterk het abstraheervermogen van een leerling ontwikkeld is
Zelfregulering	Wiskundig probleemoplossen	of een oplossingsstrategie nog correct en volgens plan uitgevoerd wordt
	Logisch redeneren	of een redeneerproces nog correct en volgens plan uitgevoerd wordt
	Modelleren	of ontwikkeling van een model nog correct en volgens plan verloopt

Doorlopende leerlijnen

Elke set van bouwstenen bestaat uit twee bouwstenen, een voor het primair onderwijs en één voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De bouwsteen voor het primair onderwijs kent een beschrijving voor de onderbouw en één voor de bovenbouw. De bouwstenen in een set volgen elkaar op en vormen zo een aanzet tot een doorlopende leerlijn. Deze leerlijnen zijn vormgegeven volgens één of meer van onderstaande principes die in het leergebied Rekenen & Wiskunde onderscheiden kunnen worden.

vormgevingsprincipe	van		naar
op basis van (hoeveelheid) kennis	weinig kennisonderdelen, beperkt repertoire van handelingen	→	veel kennisonderdelen, uitgebreid repertoire van handelingen
op basis van complexiteit	eenvoudige getallen, eenvoudige situaties, …	→	moeilijke getallen, moeilijke situaties, …
op basis van niveau van handelen	informeel, handelend, concreet, voorbeeldmatig handelen	denkmodellen, visualisaties, schematisch handelen	formeel, standaardprocedures, mentaal handelen
op basis van niveau van denken	concreet, uitvoerend, betekenis wordt ontleend aan voorbeelden en contexten	kenmerken, eigenschappen, los van context	abstract, denkobjecten

Deze vormgevingsprincipes zijn in meer of mindere mate herkenbaar in de opbouw van de bouwsteensets.

Het handelingsmodel uit het Protocol ERWD is uitgangspunt geweest voor vormgeving van leerlijnen op basis van het niveau van denken en handelen (Van Groenestijn, 2012). Verder is dit gestoeld op niveaumodellen voor wiskundig denken en wiskundig inzicht (Van Hiele, 1957; Arnon et al, 2013). Daarnaast hebben we gebruik gemaakt van de handreiking over ontwikkelingspsychologie, zoals die door Curriculum.nu ontwikkeld is (Curriculum.nu, 2018b).

Samenhang met bouwstenen van andere leergebieden

Gedurende het ontwikkeltraject hebben we bij diverse gelegenheden onderzocht welke overeenkomsten er zijn met andere leergebieden. Op het niveau van bouwstenen zijn onderstaande samenhangrelaties met andere leergebieden geïdentificeerd, zowel door ons team als door het ontwikkelteam van het betreffende leergebied. Een toelichting op deze relaties staat in bijlage C.

Tabel 9: Samenhangrelaties met andere leergebieden

Rekenen & Wiskunde	Nederlands	Bewegen & Sport	Burgerschap	Engels en moderne vreemde talen	Kunst & Cultuur	Mens & Maatschappij	Mens & Natuur	Digitale geletterdheid
1.1 Getallen					•		•	
1.2 Bewerkingen							•	
2.1 Verhoudingen	•					•	•	
3.1 Meten					•	•	•	
3.2 Vorm en ruimte					•	•		
3.3 Rekenen in de meetkunde								
4.1 Verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen	•					•	•	
4.2 Speciale verbanden						•	•	
5.1 Kansen en kansverdelingen	•					•		
5.2 Data en statistiek	•		•			•		•
6.1 Veranderingen	•						•	
6.2 Benaderingen								
7.1 Gereedschap en technologie gebruiken								•
8.1 Wiskundig probleemoplossen								
9.1 Abstraheren								
10.1 Logisch redeneren	•		•			•		
11.1 Representeren en Communiceren	•							
12.1 Modelleren						•	•	
13.1 Algoritmisch denken	•							•

Statistiek

Het onderwerp Data, statistiek en kans krijgt een prominente plek in het curriculum van het leergebied. De relevantie van dit onderwerp wordt beschreven in grote opdracht 5. Wij hebben het belang van data, statistiek en kans gebaseerd op bronnen van Platform Wiskunde Nederland (Platform Wiskunde Nederland, 2012), van de werkgroep Wiskunde voor Morgen (Werkgroep Wiskunde voor Morgen, 2018) en van de Vereniging voor Statistiek en Operational Research (Vereniging voor Statistiek en Operational Research, 2019) en op inzichten van deskundigen. Dat jonge kinderen al enigszins vertrouwd zijn met het begrip kans, is mede gebaseerd op inzichten van Gopnik (Gopnik, 2012). De gedachte dat verklarende statistiek ook door middel van simulaties gedaan kan worden, als gevolg waarvan kansrekening minder als voorkennis noodzakelijk is dan in het huidige curriculum, wordt ondersteund door onder andere Cobb, Rossman en Chance (Cobb, 2007; Rossman & Chance, 2012). Dit is tevens een illustratie van de stellingname in onze visie dat als gevolg van ICT minder formele wiskunde noodzakelijk is om wiskunde functioneel te kunnen gebruiken.

Breuken

Eén specifiek onderdeel van het curriculum over breuken dat voorheen in het primair onderwijs werd aangeboden, verschuiven we bewust naar het voortgezet onderwijs. Dit betreft procedureontwikkeling met complexere breuken op formeel niveau, kortweg de standaardprocedures voor het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen van complexe breuken. In de bovenbouw van het primair onderwijs worden bewerkingen met eenvoudige breuken aangeboden, voor zover die gedaan kunnen worden met behulp van een denkmodel of een visualisatie. Dit biedt voor het primair onderwijs ruimte om meer aandacht te schenken aan begripsvorming, procedureontwikkeling en toepassingsvaardigheid rond breuken in relatie met verhoudingen en procenten en aan data, statistiek en kans.

Leerlingen maken in het primair onderwijs kennis met de verschillende betekenissen van breuken. Te denken valt aan de breuk als een deel van een geheel, als meetgetal, maar ook als uitkomst van een deling. Binnen het domein verhoudingen gaat het er verder om dat leerlingen kennis hebben van de breuk als representatie van een verhouding. Deze brede basis is van groot belang en noodzakelijk voor verder inzicht in bewerkingen met breuken. Verder gaat het om het kennismaken met en het gebruik van wiskundetaal met betrekking tot breuken. Daar waar het bij het jonge kind gaat om 'de helft' en 'een kwart' gaat het in de bovenbouw van het primair onderwijs ook om begrippen als 'teller', 'noemer', 'een vierde', 'een achtste' etc.

Daarnaast gaat het er bij de begripsvorming om dat er aandacht is voor de overgang van 'benoemd' naar 'onbenoemd'. De breuken dienen voor leerlingen het karakter te krijgen van denkobjecten die hun betekenis niet meer ontlenen aan een concrete situatie, maar aan een netwerk van rekenkundige getalrelaties. Hier ligt een uitermate geschikte link met de denk- en werkwijze Abstraheren.

Bijvoorbeeld:

Bij $\frac{3}{4}$ zou het onder meer gaan om getalrelaties als:

$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$;

$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$;

$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$, etc.

Waarbij de betekenis van die getalrelaties wordt versterkt door de verbindingen ertussen.

Zo is $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ verbonden met $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, via $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

En is $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ verbonden met $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$, via $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.

Dit rekenen we nog allemaal onder begripsvorming. Het gaat nog niet om formele procedures, maar om de onderlinge relaties, informele rekenprocedures en de verschijningsvormen van breuken.

In de onderbouw van het voortgezet onderwijs wordt de breukenlijn voortgezet bij toepassing in de kansrekening. Te denken valt aan vraagstukken van onderstaande aard.

Voorbeeld
Drie van de zeven inwoners van een land zijn hoger opgeleid. Van alle hoger opgeleiden draagt $\frac{2}{3}$ deel een bril. Van alle andere inwoners draagt $\frac{2}{5}$ deel een bril. Hoe groot is de kans dat een willekeurige brildrager hoger opgeleid is?

Een vraagstuk als dit wordt vaak opgelost door een tabel te maken waarin staat welk deel van de bevolking beide kenmerken heeft of niet. In dit voorbeeld ziet zo'n tabel er als volgt uit.

	hoger opgeleid	niet hoger opgeleid	totaal
brildragend	$\frac{10}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{18}{35}$
niet brildragend	$\frac{5}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{12}{35}$
totaal	$\frac{15}{35}$	$\frac{20}{35}$	1

Uit deze tabel kan worden afgeleid dat de kans dat een brildrager hoger opgeleid is, gelijk is aan $\frac{10}{35} \div \frac{18}{35} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ en dat is iets meer dan 50%. We zien hier optelling, vermenigvuldiging en deling van breuken op een formeler niveau dan in het primair onderwijs wordt aangeboden.

Ten slotte worden breukbewerkingen op formeel niveau gebruikt bij herleiding van gebroken vormen in de algebra zoals in:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

$$b \times \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{1/a} = ab$$

Redenen om formele standaardprocedures voor breuken pas in het voortgezet onderwijs aan te bieden zijn naar het oordeel van het ontwikkelteam:

1. Begripsvorming ten aanzien van breuken komt op dit moment in het primair onderwijs onvoldoende aan de orde (Bruin-Muurling, 2010). Door de voorgestelde wijziging ontstaat in het primair onderwijs meer ruimte voor begripsvorming en procedureontwikkeling over breuken. Daar heeft het voortgezet onderwijs naar onze mening groot voordeel bij.
2. Formele standaardprocedures voor breuken kennen een vervolg in de algebra en worden toegepast bij het rekenen met kansen. Afgezien daarvan zijn er naar ons oordeel weinig gebruiksmogelijkheden voor deze standaardprocedures. Omdat algebra en rekenregels voor kansen pas in het voortgezet onderwijs aan bod komen, kunnen de formele breukbewerkingen ook beter in het voortgezet onderwijs aangeboden worden. Zodoende ontstaat er een leerlijn over breuken die minder onderbrekingen kent dan in het huidige curriculum het geval is.
3. In onze visie streven we naar versterking van doorlopende leerlijnen door middel van zwaluwstaarten. Een aantal traditionele vo-onderwerpen krijgt een start in het primair onderwijs en traditionele po-onderwerpen worden uitgestrekt naar het voortgezet onderwijs. De voorgestelde leerlijn breuken is van dat laatste een voorbeeld.

Algebra

Ook ten aanzien van algebra en analyse stellen wij een aantal accentveranderingen voor. Dat betreft in het bijzonder het oplossen van vergelijkingen en soorten verbanden. Herleiden van algebraïsche expressies is volgens ons nog steeds van belang, ook voor leerlingen in de gemengde en theoretische (nieuwe) leerweg van het vmbo die naar havo en een technische mbo-opleiding van niveau 4 willen doorstromen.

Wij zijn van mening dat het huidige curriculum wiskunde veel specifieke technieken kent om specifieke typen vergelijkingen op te lossen (Drijvers & Kop, 2012). Veel onderwijstijd wordt besteed aan verwerving, consolidatie en ook het onderscheiden van deze technieken. Wij zijn van mening dat tijdwinst en minder cognitieve belasting te behalen valt door vergelijkingen (en ongelijkheden) vanuit een ander perspectief te beschouwen. Wij denken dat dit perspectief bijdraagt aan wat ‘symbol sense’ of algebraïsche geletterdheid wordt genoemd (Arcavi, 2005; Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs, 2007).

In essentie bestaat ons perspectief eruit dat we kijken hoe vaak de onbekende in een vergelijking voorkomt. Als de onbekende slechts één keer in de vergelijking voorkomt, kan – met enige slagen om de arm – de vergelijking worden opgelost door alle bewerkingen in het betreffende lid van de vergelijking te inverteren (‘terugrekenen’). Komt de onbekende op meer dan één plek in de vergelijking voor, dan proberen we de vergelijking te vereenvoudigen tot één waar de onbekende slechts op één plek voorkomt. Dat kan onder andere met de balansmethode. Veel, maar niet alle vergelijkingen kunnen zodoende algebraïsch opgelost worden. Maar dat is niet altijd efficiënt. Het zou bijvoorbeeld van weinig efficiëntie getuigen als een leerling $(x - 2)(2x + 6) = 0$ op zou lossen door de haakjes weg te werken en op het resultaat kwadraat afsplitsing toe te passen. Daarom onderscheiden we in de bouwsteen een aantal basisvormen voor vergelijkingen die vlotter opgelost kunnen worden [gt, havo, vwo] en die leerlingen geleerd worden.

Soortgelijke overwegingen hebben ertoe geleid dat we kritisch gekeken hebben naar de huidige indeling van verbanden in lineair, kwadratisch, gebroken, enzovoorts. In het Handboek Wiskundedidactiek noemen Kop en Hoekstra een indeling van verbanden of functies op basis van patronen met absolute en relatieve verandering van de in- en/of uitvoer (Kop & Hoekstra, 2012). Deze indeling hebben we overgenomen en beschreven in bouwsteenset 4.2 Speciale verbanden. Daarmee hebben we bovendien een link gelegd met onderzoek naar patronen in getalreeksen, zoals leerlingen dat in het primair onderwijs leren. Hierdoor ontstaat een zwaluwstaart in het kennisdomein Variabelen, verbanden en formules. Door verschuiving en vervorming van de vier basistypen ontstaat een scala aan verbanden die leerlingen naar onze mening zonder gebruikmaking van ICT moeten kunnen analyseren. Aantrekkelijk hierbij is dat technieken die gebruikt worden om vergelijkingen te vereenvoudigen, ook gebruikt kunnen worden om verschuivingen en vervormingen zichtbaar te maken. Overige verbanden kunnen wat ons betreft door leerlingen met behulp van ICT geanalyseerd worden.

Logaritmen berekenen, toenamediagram, hellinggrafiek en raaklijn

Leerlingen in de onderbouw van havo en vwo kiezen in het vierde leerjaar voor een examenprofiel en (als gevolg daarvan) voor een wiskundevariant. Om deze keuze te ondersteunen hebben we voor havo en vwo enkele inleidende onderdelen van logaritmen en [vwo] differentiaalrekening bij de onderbouw ondergebracht. Dit is een illustratie van het zwaluwstaartprincipe.

4. TOELICHTING OP DE AANBEVELINGEN

Naast de twee bouwstenen per set kent een bouwsteenset in sommige gevallen enkele aanbevelingen voor de bovenbouw van vmbo, havo en vwo. De aanbevelingen beschrijven op welke wijze de grote opdrachten en bijbehorende bouwstenen uitgewerkt kunnen worden in eindtermen voor de bovenbouw van het voortgezet onderwijs:

- Welke inhoudelijke accenten moeten worden meegenomen bij de uitwerking van vo bovenbouw?
- Welke inhouden zouden moeten worden toegevoegd, verdiept of uitgewerkt?

Daarnaast kent ons eindproduct een aantal algemene aanbevelingen voor vooral de bovenbouw van het voortgezet onderwijs. Die gaan over complete vakken, vakvarianten of over het onderwijsstelsel als geheel als ook over examinering.

De aanbevelingen voor de bovenbouw zijn tot stand gekomen in een ontwerpsessie met 45 docenten wiskunde. De deelnemers aan deze sessie hebben zich gebogen over de bovenbouw van het voortgezet onderwijs in relatie tot wat er tot dan toe ontwikkeld was voor primair onderwijs en voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs. De resultaten hiervan zijn geïnventariseerd, gewaardeerd en op basis hiervan zijn aanbevelingen geformuleerd.

5. BRONNENLIJST

Arcavi, A. (2005). Developing and using symbol sense in formal mathematics. For the Learning of Mathematics, 25(2), 42-47.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller K. (2013). APOS Theory. New York: Springer.

Berben, M., & Teeseling, M. van. (2018). Differentiëren is te leren (vo/mbo). Amersfoort: CPS.

Biesta, G.J.J. (2012). Goed onderwijs en de cultuur van het meten. Den Haag: Boom/Lemma.

Boswinkel, N., & Schram, E. (2012). De Toekomst Telt. Enschede: SLO.

Bouwman, A., Hoogeboom, B., & Loman, E. (2018). Differentiëren is te leren (po). Amersfoort: CPS.

Bruin-Muurling, G. (2010). The development of proficiency in the fraction domain. Dissertatie. Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven.

Buijs, K., & Zwaart, P. van der. (2006). Aandachtsgebieden voor een doorgaande lijn rekenen-wiskunde van po naar vmbo. Enschede: SLO.

Charles, R. I. (2005). Big Ideas and Understandings as the Foundation for Elementary and Middle School Mathematics. NCSM Journal of Mathematics Education Leadership, 7(3), 9-24.

Cobb, G. W. (2007). The introductory statistics course: A Ptolemaic curriculum? Technology Innovations in Statistics Education, 1(1), 1-15.

Commissie Toekomst Wiskunde Onderwijs. (2007). Rijk aan betekenis: visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Utrecht: Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht

Curriculum.nu. (2018). Handreiking brede vaardigheden. Den Haag: Curriculum.nu.

Curriculum.nu. (2018). Handreiking Ontwikkelingspsychologie. Den Haag: Curriculum.nu.

Deloitte. (2014). Mathematical sciences and their value for the Dutch economy. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

Drijvers, P., & Kop, P. (2012). Variabelen en vergelijkingen: De veelzijdigheid van algebraïsche vaardigheden. In Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, G. (Red.), Handboek wiskundedidactiek (pp 53-81). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Eerde, H.A.A. van (2009). Rekenen-wiskunde en taal: een didactisch duo. Panama-Post - Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 28(3), 19-32.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen. (2008). Over de drempels met rekenen. Enschede: SLO.

Gopnik, A. (2012). Scientific Thinking in Young Children: Theoretical Advances, Empirical Research, and Policy Implications. Geraadpleegd op 14 september 2019 van https://www.researchgate.net/publication/231225767_Scientific_Thinking_in_Young_Children_Theoretical_Advances_Empirical_Research_and_Policy_Implications

Graft, M. van, Leeuwen, B. van., Zanten, M. van (2017). Leerplankundige verkenning van TIMSS-trends. Enschede: SLO.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C. et al. (2017). What Mathematics Education May Prepare Students for the Society of the Future? International Journal of Science and Mathematics Education. 15(Suppl 1): 105. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9814-6

Gravemeijer, K. P. (2016). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw: Zet vooral in op kennis die een aanvulling is op wat de computer al kan. Tijdschrift voor remedial teaching, 24(3), 20-22.

Gray, E.M., & Tall, D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. Mathematics Education Journal, 19(2), 23-40

Groenestijn, M. van, Borghouts, C., Janssen, C. (2012). Protocol Ernstige RekenWiskundeproblemen en Dyscalculie BAO, SBO, SO. Assen: Van Gorcum.

Hiele, P.M. van (1957). De problematiek van het inzicht. Purmerend: Muusses.

Hirsch, E.D. (2016). Why knowledge matters. Rescuing our children from failed educational theories. Cambridge MS: Harvard Education Press.

Hoeven, M. van der, Schmidt, V., Sijbers, J., Silfhout, G. van, Woldhuis, E., & Leeuwen, B. van. (2017). Leerplankundige analyse PISA 2015. Enschede: SLO.

Hoogland, C. (z.j.). Gecijferdheid. Geraadpleegd op 18 juli 2019 van www.gecijferdheid.nl

Inspectie van het onderwijs (2019). Reken- en wiskundeonderwijs aan (potentieel) hoogpresterende leerlingen. Utrecht: Inspectie van het onderwijs.

Janson, D.J. (2017). Rekenonderwijs kan anders. Nieuwolda: Leuker.nu

Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen. (2009). Rekenonderwijs op de basisschool: Analyse en sleutels tot verbetering. Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Kop, P., & Hoekstra, W. (2012). Functies: de ontwikkeling van een veelzijdig concept. In Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, G. (Red.), Handboek wiskundedidactiek (p 104). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Leeuw, B. van der, & Meestringa, T. (2014). Genres in de schoolvakken. Bussum: Uitgeverij Coutinho.

Meelissen, M.R.M., & Punter, R.A. (2016). Twintig jaar TIMSS : ontwikkelingen in leerlingprestaties in de exacte vakken in het basisonderwijs 1995-2015. Enschede: Universiteit Twente.

Ministerie van OCW (2018). Een nieuw perspectief voor rekenen in het voortgezet onderwijs [Bijlage bij Kamerbrief]. Geraadpleegd van https://www.tweedekamer.nl/kamerstukken/brieven_regering/detail?id=2018Z03980&did=2018D18163

Mullis, I.V.S., & Martin, M.O. (red.). (2017). TIMSS 2019 Assessment Frameworks. Boston MA: TIMSS & PIRLS International Study Center en IEA.

Nelissen, J. M. (2007). Recent onderzoek naar transfer. Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 26(1), 11-18.

Noteboom, A., Aartsen, A., & Lit, S. (2017). Tussendoelen rekenen-wiskunde voor het primair onderwijs. Uitwerkingen van rekendoelen voor groep 2 tot en met 8 op weg naar streefniveau 1S. Enschede, SLO.

Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskundeonderwijs (2017). Visie op reken-wiskundeonderwijs met aanbevelingen voor een toekomstige curriculum. Bussum: NVORWO.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (2017). Visie op wiskunde in het voortgezet onderwijs. Nieuwerkerk aan de IJssel: NVvW.

Organization of Economic Development (2018). PISA for Development Assessment and Analytical

Framework: Reading, Mathematics and Science. Parijs: OECD Publishing.

Ohlsson, S. (2011). Deep Learning: How the Mind Overrides Experience. Cambridge: Cambridge University Press.

Platform Onderwijs 2032. (2016). Ons Onderwijs2032 Eindadvies. Den Haag: Platform Onderwijs 2032.

Platform Rekenbewust Vakonderwijs. (z.j.). Rekenbewust Vakonderwijs. Geraadpleegd op 18 juli 2019 van https://sites.google.com/site/rekenbewustvakonderwijs/home

Platform Wiskunde Nederland. (2012). Formulas for Insight and Innovation, Mathematical Sciences in the Netherlands; Vision document 2025. Amsterdam: Platform Wiskunde Nederland.

Pólya, G. (1945). How to solve it. Princeton: Princeton University Press.

Rijborz, D. (2018). Op zoek naar een vakoverstijgende didactiek voor rekenen-wiskunde en aardrijkskunde op de lerarenopleiding basisonderwijs. Volgens Bartjens - Ontwikkeling en Onderzoek, 47(5), 41-50.

Rossman, A. J., & Chance, B. L. (2014). Using simulation‐based inference for learning introductory statistics. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 6(4), 211-221.

Schmidt, V. (2018). Aansluiting in perspectief. Enschede: SLO.

Schoenfeld, A.H. (1985). Mathematical Problem Solving. San Diego, CA: Academic Press.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22(1), 1-36.

Sjoers, S. (2017). Sterke rekenaars in het basisonderwijs. Amersfoort: CPS Onderwijsontwikkeling en advies.

SLO. (2012). Tussendoelen wiskunde voor havo en vwo. Geraadpleegd op 18 juli 2019 van http://leerplaninbeeld.slo.nl/havo_vwo_onderbouw/rekenen-en-wiskunde/wiskunde/rekenen-wiskunde-po-havo-vwo/tussendoelen/

Smit, J. (2013). Scaffolding language in multilingual mathematics classrooms. Dissertatie. Utrecht: Universiteit Utrecht.

Spandaw, J., & Zwaneveld, G. (2012). Modelleren: Van werkelijkheid naar Wiskunde en weer terug. In Drijvers, P., Streun, A. van, & Zwaneveld, G. (Red.), Handboek wiskundedidactiek (pp 235-264). Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Streun, A. van (1989). Heuristisch wiskundeonderwijs. Dissertatie. Groningen: Rijksuniversiteit Groningen.

Streun, A. van (2001). Het denken bevorderen. Geraadpleegd op 8 oktober 2018 van www.rug.nl

Vereniging voor Statistiek en Operational Research (2019). De VVSOR Reactie op het Curriculum.nu voorstel Rekenen & Wiskunde. Geraadpleegd op 14 september 2019 van https://www.vvsor.nl/members/news/lees-de-vvsor-reactie-op-het-curriculum-nu-voorstel/

Werkgroep Wiskunde voor Morgen (2018). Statistiekonderwijs voor Morgen. Eindhoven: Werkgroep Wiskunde voor Morgen.

Bijlage A Begrippenlijst

Abstraheren	Het uit probleemsituaties isoleren van specifieke overeenkomsten en verschillen, zodat deze als nieuwe, opzichzelfstaande denkobjecten kunnen worden beschouwd.
Algoritme	Een beschrijving van het stap voor stap, in een vaste volgorde, vanuit een beginsituatie toewerken naar een bepaalde uitkomst.
Automatiseren	Het (vrijwel) routinematig uitvoeren van rekenhandelingen.
Begripsvorming	Het verwerven van inzicht met betrekking tot een concept.
Complexiteit	Hoe moeilijk een reken-/wiskundige taak is die leerlingen moeten (kunnen) uitvoeren.
Concept	Een reken- en/of wiskundig begripselement, zoals Getal, Verhouding en Verandering, dat in het hoofd van een leerling een denkobject is.
Context	Een betekenisvolle situatie waarbinnen rekenen en wiskunde kan worden toegepast of waarbinnen rekenen en wiskunde kan worden geleerd.
Denkobject	Een mentaal wiskundig object dat voor een leerling zelfstandig, dat wil zeggen zonder context, betekenis heeft.
Diagram	Een grafische weergave van een of meer grootheden en hun onderling verband, niet zijnde een grafiek.
Denk- en werkwijzen	Domeinonafhankelijke reken- en wiskundevaardigheden.
Domein	Een samenhangende verzameling feiten, concepten en procedures.
(Examen)profiel	Natuur & techniek, natuur & gezondheid, economie & maatschappij en cultuur & maatschappij in havo en vwo. Tien beroepsgerichte profielen in het vmbo.
Formele wiskunde	Het perspectief op wiskunde als een formeel-deductief systeem met grondslagen, stellingen en standaardprocedures.
Functioneel gebruik van wiskunde	Rekenen en wiskunde gebruiken in situaties van alledag, van beroep, als burger, als werknemer, als (media)consument, …
Gecijferdheid	Gecijferdheid bestaat uit de verbinding van kennis, vaardigheden en persoonlijke kwaliteiten, nodig om adequaat en autonoom om te gaan met de kwantitatieve kant van de wereld om je heen.
Gegevens of data	Onbewerkte letters, cijfers en andere of andersoortige symbolen die voor iemand geen betekenis hebben.

Grafiek	Een weergave van een verband tussen twee (of meer) grootheden door middel van met elkaar verbonden punten in een assenstelsel.
Herleiden	Een formule of vergelijking in een andere vorm uitdrukken.
Heuristiek	Een vuistregel of ervaringsfeit die gebruikt wordt om problemen op te lossen, een logische redenering te geven, enzovoorts.
Informatie	Al dan niet bewerkte gegevens die voor iemand betekenis hebben en die bijdragen aan diens kennis ergens van.
(Leer)Inhoud	Verzamelnaam voor zowel wiskundige denk- en werkwijzen als reken-/wiskundekennis.
Kennis	Omvat feitenkennis, procedurele kennis en inzicht.
Leerlijn	Een beredeneerde opeenvolging van leerdoelen en inhouden die leidt tot een bepaald einddoel.
Leerweg	Basisberoepsgerichte, kaderberoepsgerichte, gemengde en theoretische leerweg in het vmbo.
Logische redenering	Een opeenvolging van redeneerstappen die tot doel hebben een bewering te staven of te weerleggen.
Mathematiseren	Een begrip uit het leergebied Mens & Natuur: een beschrijving van een patroon in een verzameling (meet)gegevens.
Memoriseren	Het uit het hoofd leren (inprenten) en kunnen reproduceren van rekenfeiten, zoals optellingen tot twintig en de tafels van vermenigvuldiging.
Model	Een beschrijving van een situatie door middel van een schematische voorstelling en/of wiskundige verschijningsvormen, zoals berekeningen, formules, vergelijkingen, grafieken, meetkundige tekeningen en kansmodellen. Een model wordt wiskundig model genoemd als er uitsluitend wiskundige verschijningsvormen gebruikt zijn.
Modelleren	Een situatie beschrijven door middel van een model.
Onderwijssector	Primair onderwijs, (voortgezet) speciaal onderwijs, voortgezet onderwijs, vmbo, havo, vwo.
Opstroomlijn	Een leerlijn die tot doel heeft leerlingen te doen opstromen naar een hogere onderwijssector; ook wel horizontale leerlijn genoemd.
Probleem	Een vraagstuk waarbij het voor de oplosser niet direct duidelijk is hoe het kan worden opgelost.

Rekenen & wiskunde	Verzamelnaam voor alle vakken en leerdomeinen met rekenen en/of wiskunde in hun naam in alle sectoren. Tevens naam van het ontwikkelteam.
Representatie	Een weergave van een wiskundig object of een wiskundige bewerking. Representaties kunnen schrijfwijzen, notatie en namen zijn, maar ook andere wiskundige objecten.
Toepassing	Gebruik van kennis, inzicht en vaardigheden om een probleem in een bepaalde praktijksituatie op te lossen.
Wiskundevariant	Wiskunde A, B, C en D.
Zwaluwstaart	Een stuk(je) leerinhoud in zowel primair als voortgezet onderwijs met als doel een brug te slaan tussen beide onderwijssectoren.

Grootheden, eenheden, aantallen, hoeveelheden en maten

Een grootheid is een kenmerk van een (tastbaar of ontastbaar) object of persoon dat getalsmatig uitgedrukt kan worden en met de waarde waarvan je kunt rekenen.

- Voorbeelden van grootheden: de oppervlakte van een tafel, de grootte van een schoolklas, de stroomsterkte in een stroomkring, de duur van een vakantie, de prijs van een product;
- Geen voorbeelden van grootheden zijn: de favoriete sport van een persoon, de kleur van een auto, het nummer van de buslijn op een bus.

Van een grootheid van een concreet object of persoon kun je de waarde bepalen. Deze waarde is een aantal of is een *maat*, uitgedrukt in een *(maat)getal* en een (*maat)eenheid*. Zo is € 2,95 per stuk een maat voor de prijs van een bepaald product en 1,5 liter een maat voor de inhoud van een bepaald pak melk. Prijs en inhoud zijn grootheden. Zowel met aantallen als met maten kan worden gerekend. Soms kun je een grootheid op meerdere manieren of met verschillende maateenheden in een getal uitdrukken. De grootte van een schoolklas kun je uitdrukken met het aantal leerlingen in de klas, maar ook met vloeroppervlakte van het klaslokaal.

Een aantal kan bepaald worden door dingen of mensen te tellen. Maten zijn ofwel gewoon bekend, of worden door middel van een meting bepaald. Metingen vinden plaats met behulp van een of meer meetinstrumenten. Daarmee bepaal je hoeveel (standaard)maateenheden een bepaalde maat omvat. Er zijn ook maten die uit meerdere maatgetallen + meeteenheden bestaan, zoals de snelheid van een schip of de bloeddruk van een mens.

- Voorbeelden van maten: 3 Liter, 3 Nm, € 3,00 per stuk;
- Voorbeelden van aantallen: 15 stoelen, 22 kinderen, 3 per dag;
- Geen maten en aantallen zijn: rangnummer 14, buslijn 7; dit zijn nummers.

Het begrip *hoeveelheid* wordt op verschillende manieren gebruikt. Als je spreekt van een hoeveelheid melk in een pak, dan staat hoeveelheid voor een grootheid. Maar als je spreekt over de hoeveelheid geld dat je moeten betalen voor een product, dan staat hoeveelheid voor een maat. Een hoeveelheid zitplaatsen in een bus ten slotte is een aantal.

Ten slotte spreken we ook van *referentiematen* en *referentieaantallen*. Een referentiemaat is een maat die een leerling geacht wordt (bij benadering) te kennen of zelf te kunnen bedenken. Een referentieaantal is een aantal dat een leerling geacht wordt (bij benadering) te kennen of zelf te kunnen bedenken.

- Voorbeelden van referentiematen:
- De gemiddelde loopsnelheid van een mens is ongeveer 4 km/uur.
- Een volwassen mens is ongeveer 1,80 m lang.
- Een etage in een flat is iets meer dan 3 meter hoog.
- Een pak suiker weegt 1 kg.
- Een voetbalveld is ongeveer 0,5 ha groot.
- Het BBP van Nederland is ongeveer 600 miljard euro per jaar.

Voorbeelden van referentieaantallen:

- Er wonen tussen de 17 en 18 miljoen mensen in Nederland.
- In een schoolklas zitten normaliter tussen de 25 en 30 leerlingen.

Referentiematen en –aantallen kennen een verwantschap met natuurconstanten. Je zou kunnen zeggen dat een natuurconstante een soort referentiemaat of –aantal is voor een natuurwetenschapper.

Bijlage B Denk- en werkwijzen

GO 7: Gereedschap en technologie gebruiken

Deze grote opdracht kent twee invalshoeken: doordacht en verantwoord leren gebruiken van (digitale) gereedschappen en leren op welke wiskunde (digitale) gereedschappen gebaseerd zijn.

Getallen en bewerkingen

- met een rekenmachine bewerkingen met grote getallen uitvoeren;
- niet elke computer kan 1 x 2 x 3 x … x 1000 uitrekenen;
- verschillende computers geven voor $\frac{1}{\sqrt{2}-1{,}414213}$ sterk verschillende uitkomsten, omdat ze $\sqrt{2}$ met verschillende nauwkeurigheid afronden.

Verhoudingen

- Als je van een digitale foto op je beeldscherm een hoekpunt onder een hoek van 45° verplaatst, blijft de verhouding tussen zijn lengte en breedte gelijk.
- Als je van een kleur de RGB-code verdubbelt, blijft de kleur gelijk, maar wordt wel lichter.

Meten & meetkunde

- Bepalen met welk(e) meetinstrument(en) het gewicht van iets kan worden gemeten.
- Als de locatiemodus van een mobiele telefoon uitgeschakeld is, is het alleen mogelijk zijn locatie bij (grove) benadering te bepalen door middel van een kruispeiling.

Variabelen, verbanden en formules

- Samplen van geluidsfragmenten. Geluid is een periodiek verband tussen de druk van de lucht ter hoogte van je oor en de tijd. Een sample is niet veel meer dan een tabel van dit verband.

Data, statistiek & kans

- Een computer (of een ander device) bepaalt een random getal door middel van een algoritme dat de systeemtijd als input heeft.
- Je muzieksmaak wordt door Spotify bepaald door van een aantal grootheden de gemiddelde waarden te bepalen aan de hand van de muziekstukken die je kiest.

Veranderingen en benaderingen

- Een digitale video wordt opgeslagen door het beginscherm op te slaan gevolgd door alle opeenvolgende veranderingen.

GO 8: Wiskundig probleemoplossen

Problemen kunnen verdeeld worden in wiskundeproblemen, bijvoorbeeld “Bereken de som van de getallen 1 tot en met 100”, en toepassingsproblemen, bijvoorbeeld “Met hoeveel procent stijgen de prijzen als de BTW stijgt van 6% naar 9%?”. Niet elk toepassingsvraagstuk is een probleem. Als je een toepassingsvraagstuk kunt oplossen op routinematige wijze, is het (voor jou) een routinevraagstuk. Voor veel leerlingen zal een vraagstuk als “Wat moet je betalen als je 20% korting op een kledingstuk van € 60,00 krijgt?” een routinevraagstuk zijn.

We zien onder leerlingen verschillende manieren van wiskundig probleemoplossen. Die illustreren we aan de hand van het volgende probleem:

“Een man beweert van zichzelf, zijn zoon en zijn kleinzoon: ”Mijn zoon is 24 jaar jonger dan ik; mijn zoon is 35 jaar ouder dan mijn kleinzoon. Samen zijn wij 100 jaar oud. Hoe oud zijn we elk?”

- Hij probeert met trial-and-error of ‘handelend’ een oplossing van het probleem te construeren. Bij contextproblemen hebben zijn pogingen betekenis binnen de context.

  Voorbeeld: Een leerling neemt voor de opa een bepaalde leeftijd, bijvoorbeeld 70 jaar. Dan is de zoon 46 jaar en de kleinzoon 11 jaar oud. Totaal = 127 jaar. Dan probeert hij 65 jaar. Dan is de zoon 41 jaar en de kleinzoon 6 jaar oud. Totaal = 112 jaar, enzovoorts.

- Hij lost het probleem op met behulp van een schematische beschrijving van de probleemsituatie.

  Voorbeeld: Een andere leerling tekent de situatie uit met stroken en ontdekt zo dat drie keer de leeftijd van opa – 24 – (24 + 35) gelijk moet zijn aan 100.

- Hij lost het probleem op door waar nodig de probleemsituatie wiskundig te modelleren, een oplossingsstrategie te bedenken, die uit te voeren, aan de hand van de uitkomsten daarvan een oplossing te geven (bijvoorbeeld door middel van: afronden, eenheden toevoegen, onlogische uitkomsten negeren, conclusies trekken) en de juistheid van deze oplossing(en) te controleren.

  Voorbeeld: Een derde leerling maakt een wiskundig model met x = leeftijd van opa, y = leeftijd van de zoon en z = leeftijd van de kleinzoon en drie vergelijkingen. De oplossingsstrategie bestaat uit het oplossen van deze vergelijkingen.

De moeilijkheidsgraad van een wiskundeprobleem wordt door een groot aantal factoren bepaald. Voorbeelden zijn:

- uit hoeveel verschillende handelingen de oplossingsstrategie bestaat;
- hoeveel gegevens er gebruikt worden bij deze handelingen;
- in hoeverre er sprake is van zaken als overbodige gegevens, de noodzaak om de uitkomsten te bewerken tot oplossingen, verschillende bronnen waaruit gegevens betrokken moeten worden, ...;
- in hoeverre het noodzakelijk is een wiskundig model van de probleemsituatie op te stellen.

Heuristieken tenslotte zijn vuistregels, weetjes, ezelsbruggetjes en generieke werkwijzen die gebruikt kunnen worden bij het analyseren van problemen en het bedenken van een oplossingsstrategie. Voorbeelden daarvan zijn:

- alle mogelijkheden opsommen en daaruit een keuze maken;
- van achter naar voren werken;
- een verband leggen met (eenvoudiger) verwante problemen die je al eerder hebt opgelost;
- het probleem opdelen in deelproblemen, die afzonderlijk oplossen en de oplossingen samenstellen tot een oplossing van het hoofdprobleem.

GO 9: Abstraheren

Om duidelijk te maken wat abstraheren inhoudt, staan hieronder twee voorbeelden die verschillende niveaus van abstraheren beschrijven.

Stel dat we leerlingen vragen een cirkel te karakteriseren.

1. Leerling A wijst een aantal cirkelvormige objecten in de directe omgeving aan of geeft voorbeelden van voorwerpen die een cirkelvorm hebben (een euromunt, een ronde tafel, een fietswiel).
2. Leerling B tekent met zijn passer een cirkel en zegt (desgevraagd) dat alle punten op een cirkel gelijke afstand hebben tot het middelpunt.
3. Leerling C zegt daarnaast dat een cirkel de enige figuur is die lijnsymmetrisch is met oneindig veel symmetrieassen. Of: dat een cirkel de figuur is met de grootste oppervlakte bij een gegeven omtrek.
4. Leerling D zegt dat een cirkel een kromme is met een vergelijking van de vorm $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ en legt verbanden met andere krommen. Hij legt desgevraagd uit waarom een kromme met dit soort vergelijkingen een cirkel is.

Stel dat we leerlingen vragen bewerkingen met procenten te karakteriseren.

1. Leerling E beschrijft welke handelingen je moet doen om ...% van iets te berekenen.
2. Leerling F laat ook andere procentberekeningen zien, zoals: “hoeveel procent is iets van iets” en terugrekening van BTW. Hij legt desgevraagd verbanden tussen deze berekeningen en vertelt wat de betekenis ervan is.
3. Leerling G spreekt daarnaast over percentages, geeft een omschrijving van een percentage en vertelt bijvoorbeeld dat een klein percentage van het één meer kan zijn dan een groter percentage van het ander.
4. Leerling H zegt dat een percentage een voorstellingswijze is van een verhouding en noemt andere voorstellingswijzen van verhoudingen, zoals breuken, schaal en omschrijvingen als “1 van de ...” of “op elke ... zijn er ...”. Hij legt verbanden tussen deze voorstellingswijzen en redeneert over verhoudingen in het algemeen.
5. Leerling J beschrijft samenhang tussen verhoudingen en evenredige verbanden.

Leerlingen A tot en met D tonen opklimmend niveau van abstractievermogen ten aanzien van een wiskundig object als een cirkel. Leerling A kent alleen concrete voorbeelden van cirkels. Maar leerling B geeft een meer abstracte omschrijving van een cirkel. Voor B is deze omschrijving echter net zo concreet als de voorbeelden die zijn voor A. Dit wordt bedoeld met een nieuw niveau van concreetheid.

Leerlingen E tot en met J tonen opklimmend niveau van abstractievermogen ten aanzien van een wiskundige bewerking als een procentberekening. E en F beschouwen procenten als een manier om iets uit te rekenen (‘proces’). Maar bij leerling G zijn procenten verzelfstandigd tot denkobjecten. Hij kan schakelen tussen denkobject en proces en geeft betekenis aan percentages. Dat vormt voor hem een nieuw niveau van concreetheid. En leerling H onderkent de samenhang van procenten met andere denkobjecten, zoals breuken en schaal en leidt uit die samenhang een abstract denkobject ‘verhouding’ af. Voor hem is een verhouding een nieuw niveau van concreetheid.

Leerlingen D en J ten slotte zijn in staat denkobjecten uit verschillende kennisdomeinen met elkaar in verband te brengen in een integraal mentaal schema. Dit is het niveau waarop vakexperts en getalenteerde leerlingen denken.

In het vervolg staat een aantal voorbeelden hoe een leraar kan waarnemen in welke mate bij leerlingen het abstractievermogen ontwikkeld is ten aanzien van een bepaald kennisdomein.

Getallen en bewerkingen

- Jonge leerlingen praten over 'drie' zonder daarbij nog te denken aan een aantal of drie met vingers aan te geven.

Verhoudingen

- Een Engelse landkaart heeft een schaal van 1 inch : 3 mijl. Als een leerling schaal als een denkobject beschouwt en weet dat inches en mijlen Engelse afstandsmaten zijn, heeft hij weinig moeite de schaal van deze kaart in een metrieke schaal te schrijven.

Meten & meetkunde

- Een leerling die een rechthoek kan karakteriseren aan de hand van zijn kenmerken, kan ook uitleggen dat elk vierkant ook een rechthoek is.
- Een leerling die een meetkundige figuur als een denkobject beschouwt, begrijpt dat twee congruente figuren dezelfde oppervlakte hebben.

Variabelen, verbanden en formules

- Een leerling die een vergelijking als een denkobject beschouwt, kan van onderstaande vergelijkingen bepalen welke dezelfde oplossing hebben zonder de oplossingen te bepalen.

$0{,}55x - 4{,}2 = 23{,}1$	$55x - 420 = 2310$	$-55x + 420 = -2310$
$0{,}55x + 4{,}2 = -23{,}1$	$55x - 3{,}2 = 24{,}1$	$0{,}11x - 0{,}64 = 4{,}82$

Data, statistiek & kans

- Een leerling die een verzameling van getallen als een geheel beschouwt, kan onderstaande vraag beantwoorden: als in een verzameling getallen alle getallen met een vaste waarde verhoogd worden, verandert dan het gemiddelde, de spreiding of beide?

Veranderingen en benaderingen

- Voor leerlingen met abstraheervermogen hebben oneindig kleine veranderingen die niet gelijk zijn aan 0 concrete betekenis.

De termen abstractie en abstraheren kunnen ook gebruikt worden voor het vereenvoudigen, schematiseren en conceptualiseren van situaties. Te denken valt aan het atoommodel van Bohr en de voorstelling van ons zonnestelsel. In ons leergebied beschouwen we dit als een vorm van modelleren, wat beschreven wordt in een afzonderlijke denk- en werkwijze.

GO 10: Logisch redeneren

Bij logisch redeneren gaat het om beweringen in algemene zin, zoals: toon aan (of: leg uit, verklaar, bewijs, ...) dat van élke driehoek de som van de hoeken samen 180° is en niet: toon aan dat van een bepaalde gegeven driehoek de som van de hoeken samen 180° is. In het geval een leerling nog nooit kennis gemaakt heeft met de hoeksomeigenschap van driehoeken, is het laatste voor hem een probleem. De eerste bewering gaat over élke driehoek. Aantonen dat dit klopt, wordt tot logisch redeneren gerekend. Sommige beweringen zijn van de vorm “als A dan B”. In dat geval vormt A het uitgangspunt van een keten van redeneerstappen, die op hun beurt moeten leiden tot B. In een enkel geval kent de leerling een redenering voor een stelling uit het hoofd. Dit memoriseren valt niet onder logisch redeneren.

In het leergebied Rekenen & Wiskunde zien we een aantal manieren om stellingen en eigenschappen op het spoor te komen:

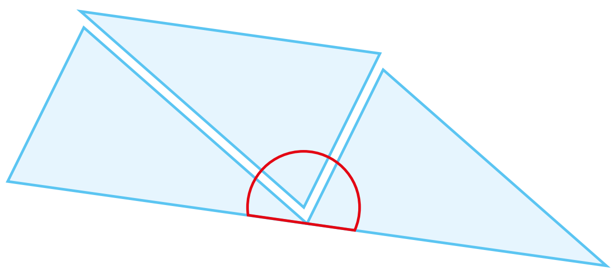
- inductief redeneren (vanuit voorbeelden of data zoeken naar overeenkomsten, hier regels of eigenschappen uit halen en deze met nieuwe voorbeelden of data controleren);
- deductief redeneren (uitgaan van wat al bekend/bewezen is en van daaruit andere zaken afleiden; bijvoorbeeld met behulp van de als-dan-redenering);
- analoog redeneren (op basis van vergelijkbare situaties beredeneren hoe het is in andere situaties en daaruit concluderen dat het altijd zo is).

Deze vormen van redeneren zien we in meer of mindere mate terug in de wijze waarop een leerling een stelling, eigenschap of bewering aantoont of weerlegt. We komen het volgende tegen:

- Hij rekent een aantal voorbeelden door en als die de bewering staven of weerleggen, veronderstelt hij dat de bewering (on)waar is. Dit heeft verwantschap met inductief redeneren.
- Hij tekent een plaatje of schema en geeft naar aanleiding daarvan een redenering. Of: hij toont aan dat de bewering in een bepaalde context (niet) klopt en veronderstelt dat dat in het algemeen ook zo is. Dit heeft verwantschap met analoog redeneren.
- Hij geeft een wiskundig bewijs. Dit heeft verwantschap met deductief redeneren.

Hieronder staan twee voorbeelden bij de stelling dat van elke driehoek de som van de hoeken gelijk is aan 180°.

“Plaatje en praatje”
Knip de driehoek uit, maak twee kopieën en leg de drie driehoeken neer zoals hieronder is te zien. Dat past precies. De som van de drie hoeken staat in de rode boog en dat is precies een gestrekte hoek.



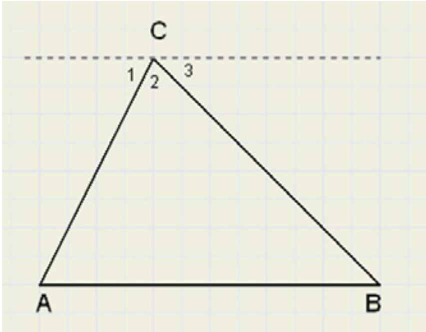
Formeel bewijs

Bekend veronderstelde stellingen en definities:
Een gestrekte hoek is een hoek van 180 graden.
Stelling van de Z-hoeken.

Bewijs:

(1) $\angle C_1 + \angle C_2 + \angle C_3 = 180°$ (gestrekte hoek)
(2) $\angle A = \angle C_1$ (Z-hoeken)
(3) $\angle B = \angle C_3$ (Z-hoeken)
(4) $\angle A + \angle B + \angle C_2 = 180°$ (volg uit 1, 2 en 3)

Q.E.D.



http://www.davdata.nl/hoeken3hoek.html

De moeilijkheidsgraad van een redeneervraagstuk wordt door een aantal factoren bepaald. Voorbeelden daarvan zijn:

- hoeveel verschillende eigenschappen, definities, stellingen er noodzakelijk zijn om de redenering op te zetten;
- of er specifieke redeneerprincipes gebruikt moeten worden;
- of vooraf bekend is dat de bewering weerlegd of aangetoond moet worden of dat de leerling dat vooraf niet weet.

In het vervolg staat een aantal voorbeelden van redeneervraagstukken uit de verschillende kennisdomeinen.

Getallen en bewerkingen

- Toon aan dat oneven getal x oneven getal = oneven getal
- Wat weet je van oneven getal + oneven getal?

Verhoudingen

- Als je eerst een bedrag verhoogt met een bepaald percentage en daarna weer verlaagt met hetzelfde percentage, kom je dan weer op het oorspronkelijke bedrag uit? Leg je redenering uit.

Meten & meetkunde

- Leg uit dat als de afmetingen van een figuur verdubbelen, de oppervlakte van die figuur vier keer zo groot wordt, ongeacht de vorm van die figuur.
- Verder kent meetkunde talrijke stellingen die zich als redeneervraagstuk lenen.

Variabelen, verbanden en formules

- Als je het aantal handen weet, hoe weet je dan hoeveel kinderen er zijn? Waarom is dat zo?

Data, statistiek & kans

- Beredeneer dat een ouder iemand een grotere kans heeft om een bepaalde leeftijd te bereiken dan iemand die jonger is.

Veranderingen en benaderingen

- Toon de volgende stelling aan: Tussen elke twee nulpunten van een functie ligt ten minste één punt waar diens verandering gelijk is aan 0.

GO 11: Representeren en communiceren

Representeren is het weergeven en benoemen van objecten en bewerkingen in de vorm van visualisaties, symbolen en namen. Het gaat er om hoe wiskundige objecten en bewerkingen worden weergegeven en genoemd. Ook verwante begrippen en notaties vallen hieronder. Zo geven we een breuk weer in de vorm $\frac{\dots}{\dots}$ of …/…; het getal boven de streep heet 'teller' en het getal er onder heet 'noemer'. Of: de lijnstukken die de hoekpunten van een driehoek met elkaar verbinden heten de 'zijden' van de driehoek. Bij ruimtelijke figuren spreken we over 'ribben'. Soms heeft een wiskundig object andere objecten als representatie. Te denken valt aan 'verhouding' met mogelijke representaties procent, breuk, schaal en verhoudingstaal of aan 'verband' met mogelijke representaties tabel, grafiek en formule.
Wiskundig communiceren heeft als doel wiskunde begrijpelijk te maken voor een breed publiek en de universele taal van wiskunde onder ingewijden te kunnen spreken. Hieronder valt ook het correct noteren van de oplossingsstrategie van een probleem of een redenering.

Representeren onderscheidt zich van modelleren. Bij modelleren gaat het om een beschrijving van een situatie uit de praktijk. Representeren gaat over het opschrijven (en benoemen) van wiskundige objecten, bewerkingen en uitwerkingen; dat kan met behulp van een situatie in de praktijk.

Voorbeeld

- In de klas zijn zes groepjes van vijf leerlingen. Dit kun je wiskundig beschrijven met 6 x 5 en dat kun je als een wiskundig model beschouwen.
- De berekening 6 x 5 kun je voorstellen of weergeven met zes groepjes van vijf leerlingen. Deze visualisatie is een voorbeeld van een representatie van de bewerking 6 x 5.

Bij het representeren zien we dat leerlingen verschillende namen en symbolen gebruiken. We illustreren dit aan de hand van de vraag hoe je de uitkomst van de optelling van twee getallen noemt.

- Ze gebruiken zelf bedachte benamingen en informele taal, bijvoorbeeld 'erbijgetal' of iets van die strekking.
- Ze gebruiken formele vaktaal, in dit voorbeeld: de som van beide getallen.

In sommige gevallen is het wenselijk van weergave te wisselen, bijvoorbeeld als blijkt dat een bepaalde weergave niet aansluit bij een bepaald publiek of voor een bepaalde situatie. Dit omzetten van weergaven wordt tot Representeren en communiceren gerekend, voor zover dit volgens min of meer vaste wijze plaats vindt, zoals bij omzetting van 2 op 5 naar 40% of twee vijfde deel.

GO 12: Modelleren

Modelleren gaat over het beschrijven van een situatie met behulp van schematische voorstellingen en/of wiskundige formalismen, zoals formules, vergelijkingen, grafieken, meetkundige figuren en kansverdelingen. Een beschrijving van een situatie met behulp van wiskundige formalismen is een wiskundig model. Schematische voorstellingen en wiskundige modellen kennen verschillende functies en die beschrijven op hun beurt het belang van modelleren.

- Een schematische voorstelling en een wiskundig model kunnen worden gebruikt bij het oplossen van problemen.
- Met behulp van een wiskundig model kan een theorie (in een ander leergebied) worden getoetst, zoals de theorie dat de planeten om de zon draaien of dat populaties samenlevende prooi- en roofdieren elkaar in de tijd afwisselen qua omvang. Men bedenkt een theorie en een of meer experimenten om die theorie te toetsen. Op basis van de theorie wordt een wiskundig model opgesteld. Aan de hand daarvan kunnen de uitkomsten van de experimenten voorspeld worden. Blijken uitkomsten en voorspellingen in de redelijke mate aan elkaar gelijk, dan is dat een aanwijzing dat de theorie 'klopt'.
- Met behulp van wiskundige modellen kunnen voorspellingen worden gegeven, zoals de planbureaus van de overheid dat doen met macro-economische modellen en andere modellen en het KNMI ten aanzien van het weer.
- En ten slotte worden in sommige gevallen beslismodellen, aan de hand waarvan standaardbeslissingen genomen kunnen worden, in de vorm van een schematische voorstelling of wiskundig model weergegeven.

Modellen hebben soms een eenmalig karakter; na gebruik ervan hebben ze geen functie meer. In andere gevallen hebben modellen een permanent karakter; ze worden keer op keer gebruikt.

Totstandkoming van modellen kent een aantal fasen, die cyclisch uitgevoerd worden. Dit illustreren we aan de hand van een voorbeeld: "Stel een wiskundig model op voor hoeveel wc-papier er op een rol met een bepaalde diameter zit."

- We maken een schets van de situatie en bedenken aan de hand van welke variabelen je kunt berekenen hoeveel wc-papier er op de rol zit: de buitendiameter k van het kartonnetje, de dikte d van het wc-papier en de diameter D van de gehele rol.
- Verder veronderstellen we dat het wc-papier in cirkels om de rol liggen. Dat is niet zo, maar dit maakt het modelleren eenvoudiger. Aan de hand hiervan en van onze kennis van wiskunde maken we een formule: $L = \frac{1}{2}\pi \frac{D^2-k^2}{d}$
- We nemen een fysieke rol wc-papier, meten de waarden van de variabelen, rollen hem af en meten de lengte van het wc-papier. Dit toetsen we aan de formule: klopt de uitkomst van de formule met inachtneming van meetfouten?
- Aan de hand hiervan beoordelen we of het wiskundig model valide is. Zo niet, dan overwegen we of we een variabele over het hoofd gezien hebben of dat onze cirkelveronderstelling onterecht is. Zo ja, dan zijn we tevreden.

Voorbeelden van modellen in de verschillende kennisdomeinen.

Getallen en bewerkingen

- Op een plaatje staat een spaarpot met € 52 er in. Iemand stopt er een briefje van tien euro in. Een wiskundig model voor deze situatie is € 52 + € 10.

Verhoudingen

- Een bepaalde kleur verf bestaat uit vier delen witte, twee delen rode en één deel groene verf. Een wiskundig model hiervoor luidt wit : rood : groen = 4 : 2 : 1.

Meten & meetkunde

- Een bouwtekening (op schaal) van het konijnenhok dat je gaat maken.

Variabelen, verbanden en formules

- In elk boeket zit 4 euro aan groen, de rozen kosten 1,50 euro per stuk en de gerbera's 1 euro per stuk. Een formule voor het totaalbedrag per boeket is een wiskundig model.

Data, statistiek & kans

- Veel kansexperimenten kun je met de normale verdeling goed modelleren: bijvoorbeeld de kansverdeling van de som van de ogen van vier dobbelstenen je modelleren als

Veranderingen en benaderingen

- Modellen uit de economie voor het berekenen van de totale opbrengst: $\boldsymbol{TO} = -0{,}3\boldsymbol{q}^2 + 45\boldsymbol{q}$ met $\boldsymbol{q}$ = aantal producten. Met hoeveel neemt de opbrengst toe als je bij een bepaalde afzet één product extra verkoopt? Dit kun je modelleren met de formule $MO = \frac{dTO}{dq}$. In deze formule betekent ***MO*** meeropbrengst (of marginale opbrengst).

GO 13: Algoritmisch denken

Een algoritme is een verzameling stappen die vanuit een beginsituatie kan leiden tot een bepaald resultaat. Het beschrijven van algoritmen valt onder algoritmisch denken en heeft tot doel:

- inzicht bieden in de wijze waarop apparaten procedures kunnen uitvoeren;
- handvatten bieden om typen problemen te herkennen en op te kunnen lossen.

Algoritmisch denken bestaat er uit algoritmen te ontwerpen en te beschrijven; algoritmisch handelen is het uitvoeren van algoritmen. Een leerling kan algoritmen op verschillende manieren beschrijven. Dit illustreren we aan de hand van een algoritme om het rekenkundig gemiddelde van een aantal getallen uit te rekenen:

- aan de hand van een voorbeeld met een toelichting;
- "Kijk maar (wijst de vier getallen aan): het gemiddelde van 1, 3, 4 en 7 is gelijk aan 15 gedeeld door 4 en dat is 3,75."
- door middel van een tekstuele beschrijving zonder voorbeeld;
  "Dat gaat als volgt:
  Je telt alle getallen bij elkaar op ...
  Je telt hoeveel getallen er zijn ...
  ... en je deelt beide uitkomsten door elkaar."

- met behulp van een formele schrijfwijze met de structuren opeenvolging, keuze en herhaling en waar nodig met gebruikmaking van variabelen.

```
START
        De som van de verwerkte getallen is nog 0
        Het aantal verwerkte getallen is nog 0
        ZOLANG er nog getallen verwerkt moeten worden
                Neem het volgende getal
                Tel dit getal op bij de som van de al verwerkte getallen
```

Verhoog het aantal verwerkte getallen met 1
EINDE
ALS het aantal verwerkte getallen > 0 DAN
Het gemiddelde = de som van de verwerkte getallen : aantal verwerkte getallen
ANDERS
"Het gemiddelde van nul getallen kan niet berekend worden"
EINDE
KLAAR

Alles met een standaardkarakter kan met behulp van algoritmen beschreven worden. Te denken valt aan cijferprocedures bij het rekenen of standaardprocedures in de wiskunde. Soms kun je ook algoritmen schrijven bij bepaalde typen problemen. Die verworden dan tot standaardproblemen (en zijn daarmee geen probleem meer in de zin van de definitie van een probleem).

Hieronder staat een aantal voorbeelden van *algoritmen* in de verschillende kennisdomeinen.

Getallen en bewerkingen

- Hoe je een vermenigvuldiging van twee gehele getallen groter dan 10 cijferend uitvoert.

Verhoudingen

- Hoe je kunt uitrekenen welk bedrag je voor iets moet betalen als je een gegeven percentage aan korting krijgt.

Meten & meetkunde

- Hoe je met passer en liniaal het midden van twee gegeven punten kunt bepalen.
- Hoe je een robot programmeert, zodat hij langs de randen van een gegeven meetkundige figuur beweegt.

Variabelen, verbanden en formules

- Hoe je een lineaire vergelijking exact oplost.
- Een formule kan ook als een algoritme beschouwd worden. De afzonderlijke deelberekeningen vormen in dat geval de stappen van het algoritme.

Data, statistiek & kans

- Hoe je het rekenkundig gemiddelde van een aantal getallen kunt berekenen.
- Hoe je stap voor stap veel gegevens kunt visualiseren in een staafdiagram.

Veranderingen en benaderingen

- Hoe je de extremen van een functie kunt bepalen.
- Hoe je een lineaire vergelijking met inklemmen kunt oplossen.

Bijlage C
Samenhangrelaties met andere leergebieden

In deze bijlage worden de samenhangrelaties uit tabel 8 nader toegelicht.

Bouwsteenset 1.1 Getallen

- Mens & Natuur: 4.3 Schaal verhouding en hoeveelheid

Leerlingen passen getalbegrip toe bij vergelijking van hoeveelheden.
(MN: Om hoeveelheden te kunnen vergelijkingen wordt een beroep gedaan op het getalbegrip van de leerling)

- Kunst & Cultuur: 3.1 Artistieke kennis en vaardigheden

Leerlingen passen getalbegrip toe bij gebruik van artistieke technieken en vaardigheden.
(KC: Bij het toepassen van artistieke technieken en vaardigheden wordt een beroep gedaan op het getalbegrip van de leerling.)

Bouwsteenset 1.2 Bewerkingen

- Mens & Natuur: 4.3 Schaal verhouding en hoeveelheid

Vaardigheid in getalsbewerkingen is nodig bij het werken met schaal, verhoudingen en hoeveelheden.
(MN: Vaardigheid met wiskundige bewerkingen is nodig bij het werken met kwantitatieve verbanden tussen grootheden.)

Bouwsteenset 2.1 Verhoudingen

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen gebruiken school- en vaktaal bij het onderwerp verhoudingen.
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal inzetten bij het onderwerp verhoudingen.)

- Mens & Maatschappij: 3.1 Economisch keuzegedrag

Leerlingen gebruiken hun vaardigheid met het rekenen met procenten bij het leren over de prijs en opbrengst van lenen en sparen.
(MM: Bij het leren over de prijs en opbrengst van lenen en sparen, is vaardigheid met het rekenen met procenten noodzakelijk.)

- Mens & Natuur: 4.3 Schaal verhouding en hoeveelheid

Leerlingen hebben kennis over en vaardigheid in het rekenen met verhoudingen nodig om met schaal en verhouding te kunnen rekenen.
(MN: Om te rekenen met schaal en verhouding is kennis over verhoudingen en vaardigheid in het rekenen daarmee noodzakelijk.)

Bouwsteenset 3.1 Meten

- Kunst & Cultuur: 3.1 Artistieke kennis en vaardigheden

Leerlingen doen metingen en gebruiken meetinstrumenten bij artistieke technieken en vaardigheden.
(KC: Door het toepassen van artistieke technieken en vaardigheden, worden leerlingen vaardiger in het meten en gebruik van meetinstrumenten.)

- Mens & Maatschappij: 3.1 Economisch keuzegedrag

Leerlingen passen hun vaardigheid in het rekenen met geld en tijd toe bij het maken van een begroting van ontvangsten en uitgaven te maken en een tijdsplanning.
(MM: De vaardigheid van het rekenen met procenten is nodig bij het keuzegedrag en het verwerven van financiële geletterdheid. Daarnaast is het rekenen in geld en procenten van belang bij het leren over de rol van geld, het bankwezen, de economie en het handelsverkeer.)

- Mens & Maatschappij: 3.2 Productie en organisatie

Leerlingen passen hun vaardigheid in het rekenen met geld toe bij het leren over de rol van geld, het bankwezen, het prijsmechanisme in het economisch verkeer en de rol van internationale handel.
(MM: De vaardigheid van het rekenen met procenten is nodig bij het keuzegedrag en het verwerven van financiële geletterdheid. Daarnaast is het rekenen in geld en procenten van belang bij het leren over de rol van geld, het bankwezen, de economie en het handelsverkeer.)

- Mens & Natuur: 3.4 Praktisch handelen

Leerlingen gebruiken verschillende meetinstrumenten.
(MN: Leerlingen hebben vaardigheid met het metriek stelsel nodig om meetinstrumenten te gebruiken en af te lezen.)

- Mens & Natuur: 4.3 Schaal verhouding en hoeveelheid

Leerlingen hebben vaardigheid in het rekenen met het metriek stelsel nodig om met maten te rekenen.
(MN: Om de rekenen met hoeveelheden is vaardigheid in het rekenen met het metriek stelsel nodig.)

Bouwsteenset 3.2 Vorm en Ruimte

- Kunst & Cultuur: 2.1 Artistieke kennis en vaardigheden

Leerlingen gebruiken inzichten in vormen en ruimte bij het aanleren en inoefenen van artistieke technieken en vaardigheden.
(KC: Inzicht in vormen en ruimte bij het aanleren en inoefenen van artistieke technieken en vaardigheden.)

- Mens & Maatschappij: 1.1 Plaats en ruimte

Leerlingen leren over vormen, ruimte en coördinaten.
(MM: Leerlingen leren werken met coördinaten en ruimtelijke figuren. Dit is van belang om te komen tot ruimtelijk inzicht.)

Bouwsteenset 4.1 Verbanden, verschijningsvormen, vergelijkingen

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen gebruiken school- en vaktaal bij het beschrijven van verbanden.
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal inzetten bij het onderwerp verbanden.)

- Mens & Maatschappij 9.6 Denken in actoren en structuren

Leerlingen leren over verbanden tussen grootheden, hun verschijningsvormen en vergelijkingen.
(MM: Kennis van verbanden en vergelijkingen (ook numeriek en grafisch) kunnen helpen om het abstracte denken in actoren en structuren mogelijk te maken.)

- Mens & Natuur: 3.3 Modelgebruik en ontwerp

Leerlingen hebben kennis nodig van verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen om passende modellen in natuurwetenschappelijke en technische contexten te kunnen gebruiken en ontwerpen.
(MN: Voor het kunnen gebruiken en ontwerpen van passende modellen in natuurwetenschappelijke en technische contexten is kennis van verbanden, verschijningsvormen en vergelijkingen noodzakelijk.)

- Mens & Natuur: 4.1 Patronen

Leerlingen analyseren patronen in gegevens om hiermee verbanden tussen grootheden te kunnen identificeren.
(MN: Leerlingen moeten patronen kunnen analyseren om verbanden tussen grootheden te kunnen identificeren.)

- Mens & Natuur: 4.4 Relaties en verbanden

Leerlingen leren over verbanden tussen grootheden en hun representaties.
(MN: Leerlingen gebruiken passende representaties om een verband tussen grootheden weer te geven.)

Bouwsteenset 4.2 Speciale verbanden

- Mens & Maatschappij 9.6 Denken in actoren en structuren

Leerlingen leren over speciale verbanden (lineair, exponentieel, logaritmisch, machts-).
(MM: Kennis van verbanden en vergelijkingen (ook numeriek en grafisch) kunnen helpen om het abstracte denken in actoren en structuren mogelijk te maken.)

- Mens & Natuur: 4.1 Patronen

Leerlingen analyseren patronen in gegevens om hiermee verbanden tussen grootheden te kunnen karakteriseren. (MN: Leerlingen moeten patronen kunnen analyseren om verbanden tussen grootheden te kunnen karakteriseren.)

Bouwsteenset 5.1 Kansen en kansverdelingen

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen gebruiken school- en vaktaal bij het verwoorden van en redeneren over kansen.
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal inzetten bij het onderwerp kansen en kansverdelingen.)

- Mens & Maatschappij: 9.5 Denken in oorzaken en gevolgen

Leerlingen gebruiken hun kennis over kansen en kansenverdelingen om in te kunnen schatten of gebeurtenissen daadwerkelijk plaats zullen vinden op basis van de waarschijnlijkheid van de verschillende oorzaken.
(MM: Om in te kunnen schatten of gebeurtenissen daadwerkelijk plaats zullen vinden op basis van de waarschijnlijkheid van de verschillende oorzaken, hebben leerlingen kennis over kansen en kansverdelingen nodig.)

Bouwsteenset 5.2 Data en statistiek

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen gebruiken school- en vaktaal bij het controleren in hoeverre conclusies bij de feiten correct zijn (factchecking).
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal inzetten bij factchecking.)

- Burgerschap: 7.1 Digitaal samenleven
- Digitale geletterdheid: 5.1 Digitale burger

Leerlingen gebruiken hun kennis en vaardigheden rondom data en statistiek bij onderzoek naar de betrouwbaarheid van informatiebronnen en digitale media-uitingen .
(BU en DG: Om betrouwbaarheid van informatiebronnen en media-uitingen te kunnen onderzoeken kan kennis van en vaardigheid met data en statistiek gebruikt worden.)

- Mens & Maatschappij: 9.5 Denken in oorzaken en gevolgen

Leerlingen leren dat er een verband kan zijn tussen oorzaak en gevolg (causaliteit).
(MM: Leerlingen leren dat er een verband kan zijn tussen oorzaak en gevolg, en hierbij vaktaal uit data en statistiek te gebruiken, in het bijzonder correlatie en causaliteit).

- Mens & Maatschappij: 10.1 Informatie verwerven en verwerken
  10.2 Onderzoeken

Leerlingen leren gegevens te verwerken, te representeren en daaruit conclusies te trekken en voorspellingen te doen.
(MM: Dit kan ingezet worden bij het verwerken en interpreteren van informatie, bij het onderzoek doen naar maatschappelijke gebeurtenissen en ontwikkelingen en bij het presenteren van de opbrengsten.)

- Mens & Natuur: 4.4 Relaties en verbanden

Leerlingen onderscheiden causale verbanden van correlatieve verbanden.
(MN: Leerlingen kunnen in de natuurwetenschappen onderscheid maken tussen causaliteit en correlatie.)

- Digitale Geletterdheid: 1.1 Van data naar informatie

Leerlingen leren hoe je gegevens in verschillende representaties kunt weergeven. Deze kennis en vaardigheid kunnen ze gebruiken bij het presenteren van informatie.
(DG: Om informatie te kunnen presenteren, is kennis en vaardigheid nodig hoe je gegevens kunt weergeven in verschillende representaties).

- Digitale Geletterdheid: 1.2 Digitale data

Leerlingen leren kwantitatieve data te analyseren met behulp van digitale technologie.
(DG: Leerlingen ervaren zodoende dat (grote hoeveelheden) kwantitatieve data geanalyseerd kunnen worden met behulp van digitale technologie.

Bouwsteenset 6.1 Veranderingen

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen gebruiken school- en vaktaal bij het verwoorden van consequenties van veranderingen en het beschrijven van het verloop van een grafiek met vaktermen.
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal bij het verwoorden van veranderingen)

- Mens & Natuur: 4.2 Systemen

Leerlingen leren effecten van veranderingen op systemen te beschrijven en te berekenen.
(MN: Om effecten van veranderingen op systemen te beschrijven en te berekenen, is kennis van en inzicht in veranderingen nodig.)

Bouwsteenset 7.1 Gereedschap en technologie gebruiken

- Digitale Geletterdheid: 3.1 Interactie met, aansturing van en creatie met digitale technologie

Leerlingen leren bewuste keuzes te maken bij het gebruik van digitale technologie en de uitkomsten hiervan kritisch te beoordelen.
(DG: Leerlingen leren bewuste keuzes te maken bij het gebruik van digitale technologie en de uitkomsten hiervan kritisch te beoordelen.)

- Digitale Geletterdheid: 3.2 Aansturing van en creatie met digitale technologie

Leerlingen leren nadenken over de waarde van technologie voor het gebruik bij rekenen-wiskunde.
(DG: Leerlingen leren nadenken over de waarde van technologie voor hun persoonlijk leven, waaronder het doordacht gebruik van reken- en wiskundetechnologie.)

Bouwsteenset 10.1 Logisch redeneren

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling:

Leerlingen leren redeneringen onder woorden te brengen met gebruikmaking van (in)formele vaktaal.
(NE: Leerlingen leren school- en vaktaal inzetten bij het formuleren van logische redeneringen.)

- Burgerschap: 11.5 Kritisch denken

Het geven van een logische redenering die deductief tot stand gekomen is, wordt gebruikt bij het uiten van een onderbouwd standpunt.
(BU: Leerlingen leren over het belang en over het proces van waarheidsvinding. Ze leren dat een mening of aanspraak op waarheid gerechtvaardigd moet worden, dat wil zeggen, beargumenteerd, met feiten onderbouwd, bewezen, getoetst, getest, etc.).

- Burgerschap: 7.1 Digitaal samenleven

Leerlingen gebruiken hun kennis om beweringen te onderbouwen of te weerleggen bij het ontwikkelen van een kritische houding ten opzichte van bronnen en informatie.
(BU: Voor het ontwikkelen van een kritische houding ten opzichte van bronnen en informatie is het kunnen onderbouwen of weerleggen van beweringen een noodzakelijke vaardigheid).

- Mens & Maatschappij 10.3 Waarderen, redeneren en argumenteren

Leerlingen leren inductief, analoog of deductief een bewering te staven of te weerleggen.
(MM: Het betreft hier complexere redeneringen (waaronder deductieve redeneringen) en het zetten van redeneerstappen op basis van kennis en inzicht uit verschillende leergebieden.)

Bouwsteenset 11.1 Representeren en communiceren

- Nederlands: 5.1 Doelgericht communiceren

Leerlingen geven uitleg over hoe ze een reken-/wiskundetaak uitgevoerd hebben, rekening houdend met de doelgroep.
(NE: Leerlingen leren bij uitleg over een reken-/wiskundetaak welk taalregister en welke taalvariëteit passend is en zowel mondeling, schriftelijk, digitaal of multimodaal hierin keuzes te maken.)

Bouwsteenset 12.1 Modelleren

- Mens & Maatschappij 9.6 Denken in actoren en structuren

Leerlingen leren situaties in de reële wereld te beschrijven met behulp van een schematische voorstelling of met behulp van vaktaal, symbolen, variabelen en formules.
(MM: (...). Ook leren leerlingen dat een maatschappelijke gebeurtenis, verschijnsel of proces door middel van een (wiskundig) model kan worden weergegeven.)

- Mens & Natuur: 3.3 Modelgebruik en -ontwerp

Leerlingen leren dat een situatie in een natuurwetenschappelijke of technische context door middel van een wiskundig model kan worden weergegeven.
(MN: Leerlingen leren dat een situatie in een natuurwetenschappelijke of technische context door middel van een wiskundig model kan worden weergegeven.)

Bouwsteenset 13.1 Algoritmisch denken

- Nederlands: 1.2 Interactie ten behoeve van taal- en denkontwikkeling

Leerlingen leren uit te leggen wat een algoritme is, eenvoudige algoritmen in natuurlijke taal te beschrijven en te onderkennen dat natuurlijke taal niet altijd geschikt is om een algoritme precies te beschrijven.
(NE: Leerlingen gebruiken natuurlijke taal om algoritmen te beschrijven en onderkennen dat dat niet altijd precies genoeg is.)

- Digitale Geletterdheid: 3.2 Aansturing van en creatie met digitale technologie

Leerlingen leren om de programmeertaal van de digitale gereedschappen die ze tot hun beschikking hebben en die daartoe geschikt zijn, te gebruiken en hiermee eenvoudige programma's te schrijven en gebruiken daarbij algoritmen.
(DG: Leerlingen leren de basisbeginselen van programmeren kennen en hebben hiervoor kennis over en vaardigheid in het schrijven van eenvoudige algoritmen nodig.)

- Digitale Geletterdheid: 6.2 Digitale marketing

Leerlingen leren zich een voorstelling te maken van algoritmen die instellingen en bedrijven gebruiken om een gepersonaliseerd aanbod van producten, diensten en content te doen en zo de technieken en verdienmodellen van digitale marketing herkennen.
(DG: Leerlingen leren de technieken en verdienmodellen van digitale marketing herkennen door zich bijvoorbeeld een voorstelling te maken van algoritmen die instellingen en bedrijven gebruiken om een gepersonaliseerd aanbod van producten, diensten en content te doen.)

Bijlage D Uitgewerkte voorbeelden

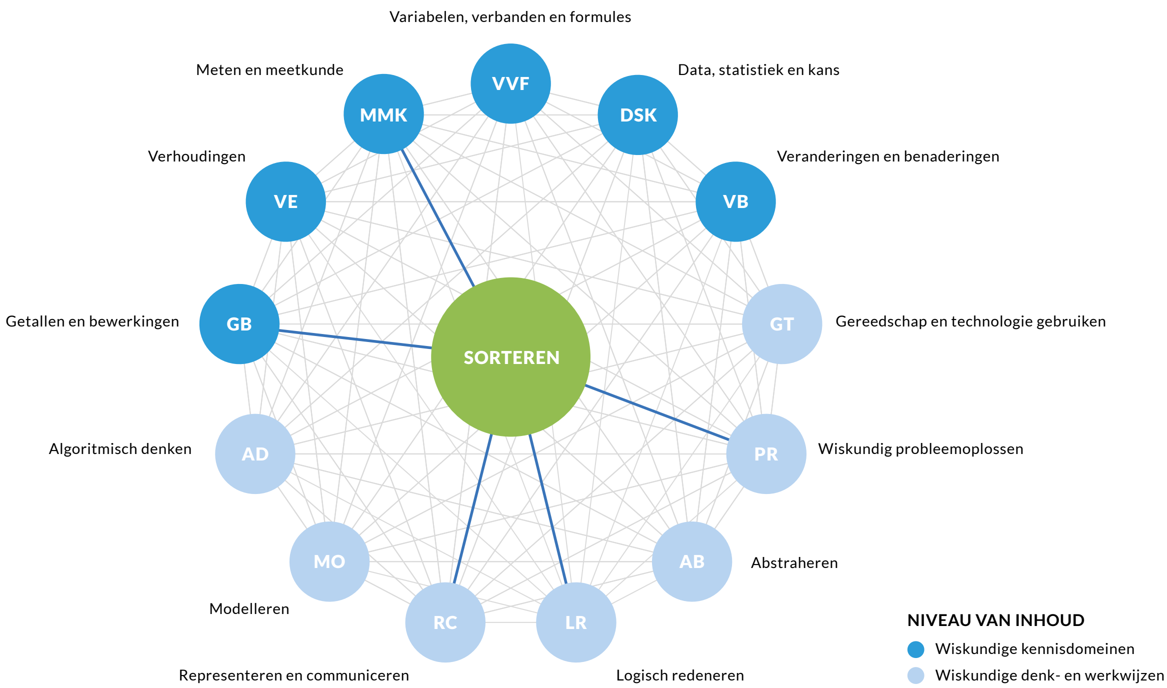
Deze voorbeelden hebben tot doel te illustreren hoe het Wiskundeweb gebruikt kan worden in het onderwijs. Er wordt telkens een vraagstuk voor leerlingen geschetst en vervolgens in het Wiskundeweb aangegeven welke kennisdomeinen en welke denk- en werkwijzen bij het vraagstuk betrokken zijn.

Voorbeeld 1: Welke horen bij elkaar?

Een voorbeeld voor peuters en kleuters

Mensen zijn van nature geneigd om overeenkomsten en verschillen in hun omgeving te zien en te zoeken. Zelfs peuters doen dit al uit zichzelf. Ze beginnen bijvoorbeeld vormen en kleuren te onderscheiden zonder dat ze die nog kunnen benoemen. Op driejarige leeftijd gaan ze voorwerpen ook uit zichzelf sorteren, bijvoorbeeld kleurpotloden op kleur, schelpen of knopen op vorm, grootte en kleur. Vervolgens ontwikkelen ze ook een taal waarmee ze eigenschappen of kenmerken kunnen benoemen en verschillen kunnen aangeven: geel vierkant, lang, groot; de grootste, de meeste.

Als leraren peuters en kleuters in een rijke leeromgeving kansen bieden om allerlei voorwerpen te kunnen vergelijken, sorteren, ordenen en daarbij regelmatig uitdagende (denk)vragen te stellen, bieden ze deze kinderen gelegenheid zich te ontwikkelen op verschillende kennisdomeinen en denk- en werkwijzen tegelijk.



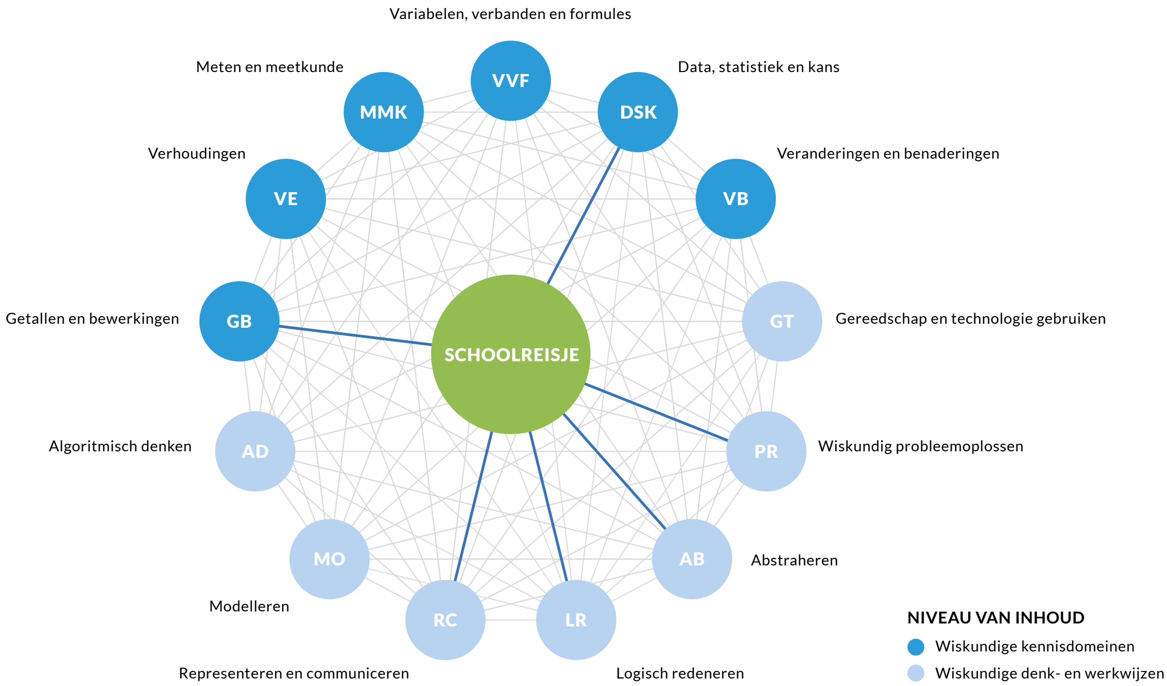
- Getallen en bewerkingen (GO 1): tellen en vergelijken: Waar zijn er meer van, waar minder, waar de meeste?
- Meten en meetkunde (GO 3): verschillende vormen herkennen, benoemen en vergelijken op kenmerken: bijvoorbeeld driehoeken, vierkanten, rond, grootste, kleinste, langste, kortste, dik, dun, enzovoorts;
- Wiskundig probleemoplossen (GO 8): dit zijn voor de meeste kinderen geen routinevraagstukken;
- Logisch redeneren (GO 10): Waarom liggen deze bij elkaar? Waarom mag die driehoek er niet bij?
- Representeren en communiceren (GO 11): kinderen leren taal en leren uitleggen waarom bepaalde voorwerpen bij elkaar horen (gemeenschappelijk kenmerk(en).

Voorbeeld 2: Waar gaat het schoolreisje naar toe?

Een voorbeeld voor de onderbouw van het primair onderwijs:

De leerlingen gaan op schoolreisje en ze mogen kiezen waar ze heen willen: de dierentuin, een grote speeltuin of het zwemparadijs. Ze moeten zelf een manier bedenken hoe ze kunnen uitzoeken en vastleggen waar de meeste kinderen naar toe willen.

Bij dit vraagstuk wordt er gewerkt met een combinatie van kennisdomeinen en denk- en werkwijzen, zoals in het Wiskundeweb is aangegeven.



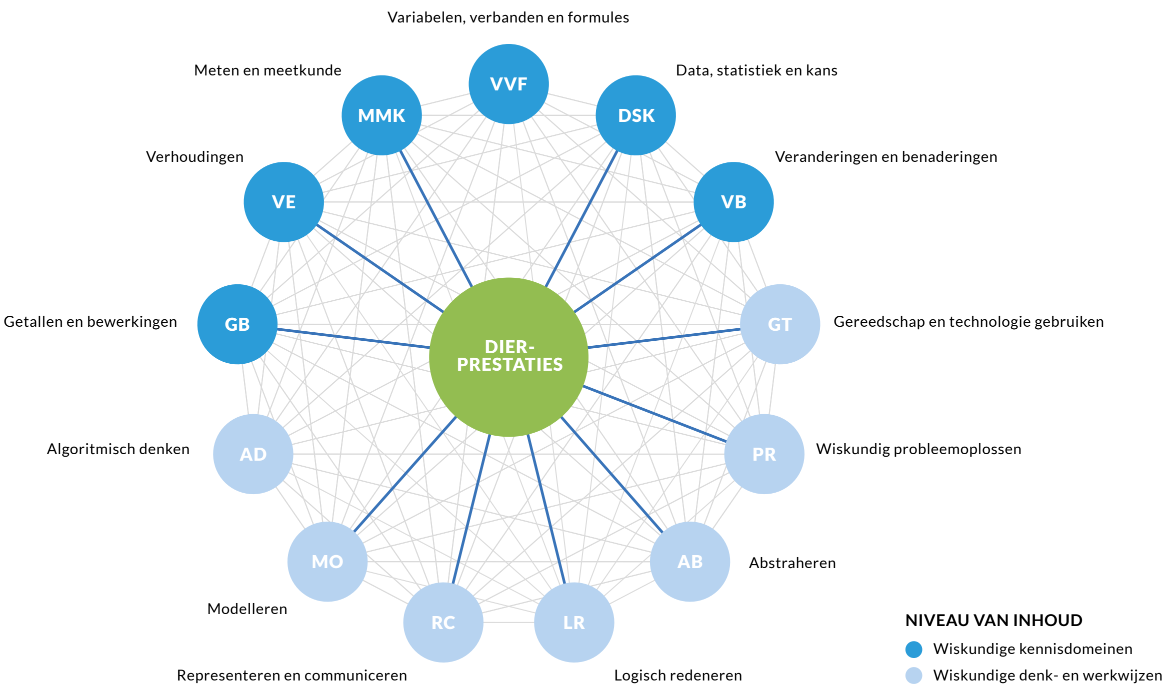
- Getallen en bewerkingen (GO 1): tellen en vergelijken: Hoeveel kinderen willen waar heen? Waar willen de meeste heen?
- Data, statistiek en kans (GO 5): gegevens verzamelen en verwerken, beelddiagram maken, aflezen, interpreteren;
- Wiskundig probleemoplossen (GO 8): dit is voor de meeste kinderen geen routinevraagstuk;
- Abstraheren (GO 9): praten aan de hand van symbolen, getallen en representaties, zonder terug te vallen op de voorkeuren van individuele leerlingen;
- Logisch redeneren (GO 10): hoe weten we of we iedereen gehad hebben? Kan het gebeuren dat er precies evenveel kinderen naar de dierentuin willen als naar de speeltuin als naar het zwemparadijs? Wanneer wel? Wanneer niet?
- Representeren en communiceren (GO 11): hoe kun je representeren waar leerlingen heen willen (pictogrammen, turven, ...)?

Voorbeeld 3: Welk dier presteert het best?

Een voorbeeld voor de bovenbouw van het primair onderwijs:

Kinderen vinden feitjes over dieren en mensen vaak erg interessant. Hoeveel weegt een olifant eigenlijk en hoe hard kan hij lopen? Welk dier kan het hardst rennen of het hoogst of verst springen? En hoe zit dat dan eigenlijk bij ons mensen? Als een kikker 10 cm is en een meter ver kan springen, en het wereldrecord verspringen van mensen is 8,95 meter, wie verricht dan eigenlijk de beste prestatie? En hoe zit dat met een vlo die 4 mm kan worden en wel 50 cm ver kan springen en 20 cm hoog?
Laat leerlingen informatie over prestaties opzoeken op internet maar daarbij ook letten op de betrouwbaarheid van de gegevens (wie publiceert ze?). Laat prestaties vergelijken van dieren onderling en met prestaties van mensen. Als je denkt in verhoudingen, wat kun je dan zeggen over die prestaties? Of breng een stelling in: 'Een muis kan sneller lopen dan een olifant als je rekening houdt met zijn gewicht.' Er zijn genoeg mogelijkheden om te differentiëren naar niveau van leerlingen.

Bij dit vraagstuk wordt er gewerkt met een combinatie van kennisdomeinen en denk- en werkwijzen, zoals in het Wiskundeweb is aangegeven.



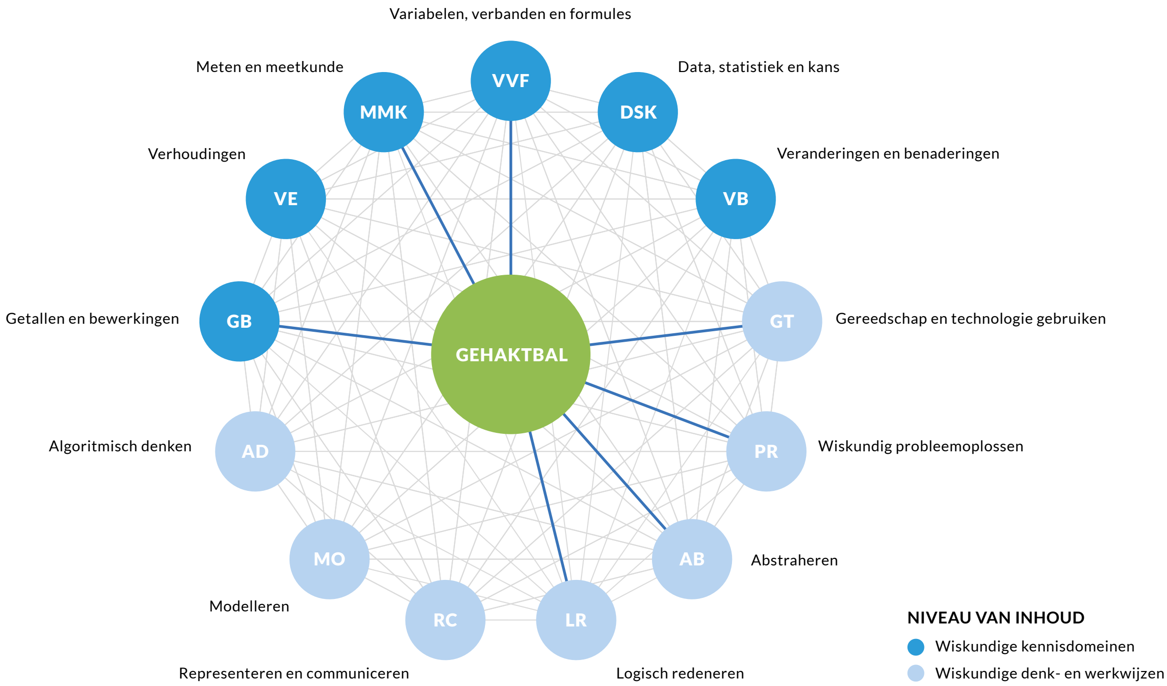
- Getallen en bewerkingen (GO 1): omgaan met en redeneren over getallen en uitvoeren van bewerkingen;
- Verhoudingen (GO2): prestaties van mens en dier vergelijken door te letten op onderlinge verhoudingen;
- Meten en meetkunde (GO 3): bij prestaties betreft dit het omgaan met verschillende grootheden en hiermee rekenen (lengte, gewicht, omvang, snelheid);
- Data, statistiek en kans (GO 5): informatie verzamelen en verwerken: grafieken aflezen en interpreteren, eventueel grafieken maken; omgaan met gemiddelden en betrouwbaarheid van de gegevens beoordelen;

- Veranderingen en benaderingen (GO 6): in hoeverre mag je prestaties en feitjes afronden, wat betekent een afronding in de gegeven situatie? (Zo mag je bijvoorbeeld het wereldrecord verspringen van 8,95 niet zomaar even afronden op 9 meter.?)
- Gereedschap en technologie gebruiken (GO 7): gebruiken van (digitale) meetinstrumenten (lengte, gewicht) om bijvoorbeeld eigen prestaties te meten;
- Wiskundig probleemoplossen (GO8): het zijn vraagstukken waarvoor kinderen geen standaardoplossingen kunnen gebruiken;
- Abstraheren (GO 9): leerlingen kunnen denken in relatieve prestaties van de dieren ten opzichte van bepaalde lichaamskenmerken;
- Logisch redeneren (GO 10): hoe kun je prestaties van dieren het beste met elkaar vergelijken: absoluut of relatief?
- Representeren en communiceren (GO 11): communiceren en daarbij ook discussiëren over te volgen en gevolgde aanpakken;
- Modelleren (GO 12): het is handig om de prestaties van de dieren in een schema of een plaatje te zetten, waarin je handig de onderlinge prestaties kunt bekijken.

Voorbeeld 4: Gehaktbal

Een voorbeeld voor de onderbouw van het voortgezet onderwijs:
In de supermarkt is gehakt vaak te koop in rechthoekige blokken. Thuis maak je daar een of meer gehaktballen van. Deze gehaktballen kun je door paneermeel rollen zodat ze lekker krokant worden bij het bakken. De grootte van het oppervlak bepaalt hoeveel paneermeel je nodig hebt. In huis is dat misschien niet zo'n groot punt, maar wel in een cateringbedrijf waar dagelijks honderden gehaktballen bereid worden voor ziekenhuizen, verzorgingstehuizen en bedrijfskantines. Stel dat een cateringbedrijf op een dag 800 gehaktballen moet bereiden van elk 50 gram. Hoeveel kg paneermeel is daarvoor nodig?
Leerlingen moeten zelf informatie zoeken over de soortelijke massa van gehakt of vlees en van paneermeel of, als dat niet te vinden is, met behulp van een pak gehakt en een pakje paneermeel uit de supermarkt zelf de soortelijke massa bepalen.

Bij dit vraagstuk wordt er gewerkt met een combinatie van kennisdomeinen en denk- en werkwijzen, zoals in het Wiskundeweb is aangegeven.



- Getallen en bewerkingen (GO 1): rekenen met getallen, breuken, machten en wortels;
- Meten en meetkunde (GO 3): er is sprake berekeningen in de meetkunde en in het metriek stelsel;
- Variabelen, verschijningsvormen en formules (GO 4): er wordt met inhouds- en oppervlakteformules gewerkt;
- Gereedschappen en technologie gebruiken (GO 7): berekeningen met een rekenmachine;
- Wiskundig probleemoplossen (GO 8): dit is geen routinevraagstuk;
- Abstraheren (GO 9): inhoud is een zelfstandig denkobject en hangt niet af van de vorm van iets;
- Representeren en communiceren (GO 11): leg uit hoe je aan je antwoord komt; je gebruikt verschillende representaties van maten.

Voorbeeld 5: Een toertocht op de racefiets

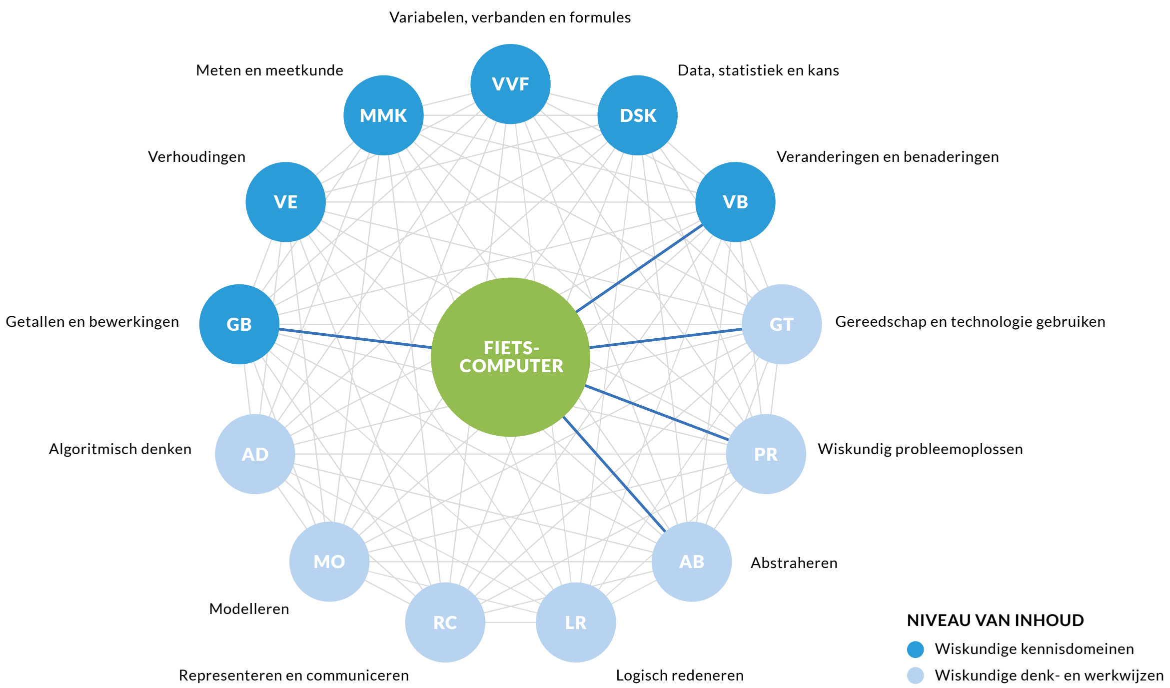
Een voorbeeld voor het voortgezet onderwijs:

Jantien heeft op zaterdag op de racefiets een tocht van 127,55 km gemaakt. Na 63,89 km nam zij pauze. Voor de pauze reed Jantien gemiddeld 26,7 km/uur. Jantien haar gemiddelde snelheid over de hele tocht was 27,6 km/uur. Wat was haar gemiddelde snelheid na de pauze?

De fietscomputer van Jantien heeft een meetfout van 0,05 km/uur in de gemiddelde snelheid. Welke effect heeft deze meetfout op je antwoord?

Willem is tot aan de pauze met Jantien meegereden en heeft toen een kortere route terug genomen. Zijn gemiddelde snelheid over de hele tocht was ook 27,6 km/uur. Reed Willem na de pauze gemiddeld sneller of langzamer dan Jantien?

Bij dit vraagstuk wordt er gewerkt met een combinatie van kennisdomeinen en denk- en werkwijzen, zoals in het Wiskundeweb is aangegeven.



- Verhoudingen (GO 2): weten wat gemiddelde snelheid betekent en met een samengestelde grootheid als deze rekenen;
- Veranderingen en benaderingen (GO 6): het effect van de meetfout doorrekenen;
- Gereedschap en technologie gebruiken (GO 7): berekeningen met de rekenmachine;
- Wiskundig probleemoplossen (GO 8): dit is alleen voor doorgewinterde fietsers een routinevraagstuk en voor anderen een probleem;
- Logisch redeneren (GO 10): het vraagstuk van Willem vereist een logische redenering.